ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Том 48 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4

2003

*ЗАИГРАЕВ А. Ю.**, *НАГАЕВ А. В.**

АБЕЛЕВЫ ТЕОРЕМЫ, ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ[1)]

Рассматривается класс многомерных абсолютно непрерывных распределений. Каждое распределение имеет конечную в некотором ограниченном выпуклом множестве S производящую функцию, порождающую семейство так называемых сопряженных распределений. В центре внимания находятся предельные распределения для этого семейства, когда параметр сопряжения стремится к границе S. Как и в одномерном случае, каждое такое предельное распределение может быть получено как следствие теоремы абелева типа. Полученные результаты используются для установления локальной предельной теоремы для больших уклонений произвольно высокого порядка.

Ключевые слова и фразы: гамма-подобное распределение, локальная предельная теорема, сверхбольшие уклонения, опорная функция, правильное изменение, условие Крамера, функция уклонений.

1. Введение. Пусть случайные векторы ξ, $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n)},\dots$ со значениями в $\mathbf{R}^d$, $d \geqslant 1$, независимы и имеют общее существенно d-мерное распределение P_0. Образуем суммы $S_n = \xi^{(1)}+\dots+\xi^{(n)}$, $n=1,2,\dots$.

Если $\mathbf{E}|\xi|^2<\infty$, то, согласно центральной предельной теореме, для любого A, являющегося множеством непрерывности d-мерной меры Лебега, при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{n^{-1/2}(S_n-na)\in A\}\longrightarrow\int_A\varphi_B(u)\,du,$$

где $a=\mathbf{E}\xi$, а $\varphi_B(u)$ — плотность случайного вектора, имеющего d-мерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $B=\mathbf{E}(\xi-a)(\xi-a)^T$.

Если множество A изменяется вместе с n таким образом, что $\inf_{x\in A}|x|\to\infty$, то возникает так называемая *проблема больших уклонений*, состоящая в нахождении асимптотики стремящейся к нулю вероятности $\mathbf{P}\{n^{-1/2}(S_n-na)\in A\}$. Нам будет далее удобно называть вероятностью больших уклонений $\mathbf{P}\{S_n-na\in A\}$ при $r_n(A)=$

* Университет Николая Коперника, Торунь, Польша.

$n^{-1/2}\inf_{x\in A}|x|\to\infty$. В случае $r_n(A)=O(n^{1/2})$ будем говорить о больших уклонениях порядка $O(n^{1/2})$. При $n^{-1/2}r_n(A)\to\infty$ можно говорить о *сверхбольших* уклонениях. В отличие от [6]–[8], нас интересует *точная асимптотика* вероятности больших уклонений, а не *грубая*, иначе *логарифмическая*, асимптотика.

В контексте точной асимптотики к настоящему времени наиболее полно изучен случай $d=1$. Желающему получить представление о нем можно порекомендовать обзор [21], а также работы [14], [20], [24], [26], [28], [29].

Впервые достаточно общие результаты по проблеме больших уклонений в многомерном случае были получены в [3] в предположении, что выполнено так называемое условие Крамера

$$f(s)=\mathbf{E}e^{\langle s,\xi\rangle}=\int_{\mathbf{R}^d}e^{\langle s,x\rangle}\,P_0(dx)<\infty,\qquad s\in S,\tag{1.1}$$

где $S\subset\mathbf{R}^d$ — существенно d-мерное множество, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Там же были изучены основные свойства функции $f(s)$ и *функции уклонений*

$$\rho(x)=\inf_{s\in S}f(s)\,e^{-\langle s,x\rangle},\qquad x\in\mathbf{R}^d,$$

играющей важную роль в изучении вероятностей больших уклонений. Стоит отметить, что многие авторы функцией уклонений называют $-\ln\rho(x)$ (см., например, [4], [6]–[8]).

При выполнении условия (1.1) вероятности больших уклонений изучаются с помощью так называемых *сопряженных распределений.* Для исходного распределения $\mathbf{P}_0$ сопряженное распределение $\mathbf{P}_s$, $s\in S$, определяется с помощью соотношения

$$P_s(A)=(f(s))^{-1}\int_A e^{\langle s,x\rangle}\,P_0(dx).$$

Обозначим через $\gamma(s)$ и $B(s)$, соответственно, градиент и гессиан $\ln f(s)$. Легко видеть, что $\gamma(s)$ является вектором средних, а $B(s)$ — ковариационной матрицей сопряженного распределения P_s. Поскольку исходное распределение существенно d-мерно, то $\det B(s)>0$ и, следовательно, вектор-функция $\gamma(s)$ взаимно однозначно отображает S, область существования $f(s)$, в некоторую область $X\subset\mathbf{R}^d$. Обозначим через $s(x)$ функцию, обратную к $\gamma(s)$.

В упомянутой работе [3] были получены локальная и интегральные предельные теоремы для больших уклонений. Любопытно, что основные результаты той работы были почти через 20 лет воспроизведены в [22] без какого бы то ни было упоминания о ней.

Сформулируем одно следствие из локальной теоремы, доказанной в [3]. Пусть F — произвольное замкнутое ограниченное подмножество множества внутренних точек S, а $\gamma(F)$ — его образ при отображении γ.

Предложение 1.1. *Предположим, что при* $n \geqslant n_0 \geqslant 1$ *существует и ограничена* $p_n(x)$ *— плотность распределения суммы* S_n. *Если выполняется также условие Крамера* (1.1), *то при* $n \to \infty$

$$\sup_{x \in \gamma(F)} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)} - 1 \right| = o(1),$$

где $\psi_n(x) = (2\pi n)^{-d/2}[\det B(s(x))]^{-1/2}$.

В существенно более поздней работе [4] были продолжены исследования свойств функции уклонений, а также доказаны более сильные формы интегральной и локальной теорем о больших уклонениях, в которых утверждение предложения 1.1 выполняется равномерно в некотором классе исходных распределений.

Следует отметить, что в упомянутых работах так же, как и в [1], [2], [13], [15], [23], [27], [31], [32] изучался случай больших уклонений порядка $O(n^{1/2})$.

Возникает вопрос: *при каких дополнительных условиях можно снять ограничения на порядок уклонений*? Точнее, каким должно быть исходное распределение, чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)} - 1 \right| = o(1)\,? \tag{1.2}$$

Основной целью данной работы является попытка найти хотя бы частичный ответ на этот вопрос. При этом мы рассматриваем случай, когда множество S ограничено, а $\lim_{s \to \partial S} f(s) = \infty$. В этой связи уместно вспомнить работы [17], [18], посвященные большим уклонениям на полупрямой $\mathbf{R}^1_+$. При $d = 1$ ограниченность $S = (s_-, s_+)$ означает, в частности, что $0 \leqslant s_+ < \infty$. Из упомянутых работ следует, что при $0 < s_+ < \infty$ случаи $f(s_+) = \infty$ (см. [17]) и $f(s_+) < \infty$ (см. [18]) отвечают совершенно разному поведению вероятностей сверхбольших уклонений. Таким образом, в данной работе нас интересует многомерный аналог случая, рассмотренного в [17].

Как обычно, при переходе к высшим размерностям возникает целый ряд вопросов. К числу таковых относятся, например, вопросы о том, как связана форма области существования производящей функции $f(s)$ со свойствами исходного распределения, как ведет себя $f(s)$ при $s \to \partial S$, что представляет собой область, в которую $\gamma(s)$ отображает S, и т.п. Ответы на эти вопросы, имеющие и самостоятельный интерес с точки зрения теории асимптотических оценок, были даны в работе [19]. Содержащиеся в ней результаты играют существенную роль в приводимых ниже рассмотрениях.

Несколько слов о построении данной работы. Во втором разделе описывается один класс абсолютно непрерывных распределений, для которых справедливо соотношение (1.2). Третий раздел посвящен предельным теоремам для сопряженных распределений. Доказательство основного результата (1.2) и его статистическая интерпретация даны в заключительном четвертом разделе.

Авторы весьма признательны рецензенту за ценные замечания.

2. Формулировка основного результата. Введем следующий класс абсолютно непрерывных распределений, удовлетворяющих условию Крамера.

Определение 2.1. Для ненулевого вектора $x \in \mathbf{R}^d$ определим $e_x = |x|^{-1}x \in S^{d-1}$. Будем говорить, что функция $a(x)$ принадлежит классу $\mathscr{A}$, если

1) $a(x)$ непрерывна и выпукла в $\mathbf{R}^d$;

2) $a(x)$ однородна в том смысле, что $a(x) = |x|a(e_x)$ для всех $x \neq 0$;

3) $0 < \min_{e \in S^{d-1}} a(e) \leqslant \max_{e \in S^{d-1}} a(e) < \infty$.

Каждая функция $a(x) \in \mathscr{A}$ является опорной для некоторого ограниченного выпуклого множества, имеющего начало координат своей внутренней точкой (см., например, [30, гл. 3, § 13]).

Следующее определение правильно изменяющейся функции в $\mathbf{R}^d$ стоит сравнить с определением, приведенным в [25, гл. 5.4.2].

Определение 2.2. Пусть неотрицательная функция $\lambda(e)$ непрерывна на единичной сфере S^{d-1}. Будем говорить, что функция $b(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, (β, λ) — правильно изменяется, если при $|x| \to \infty$

$$\sup_{e_x \in \mathbf{E}_\lambda} \left| \frac{b(x)}{r_\beta(|x|)} - \lambda(e_x) \right| = o(1),$$

где $r_\beta(t)$ правильно изменяется при $t \to \infty$ с показателем β, а $\mathbf{E}_\lambda = \{e \in S^{d-1} \colon \lambda(e) > 0\}$. Если $\mathbf{E}_\lambda = S^{d-1}$, то говорим просто о β-правильном изменении.

Условимся обозначать через χ_{d-1} нормированную меру Хаара на S^{d-1}.

Рассмотрим плотность вида

$$p(x) = b(x)e^{-a(x)}, \qquad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.1}$$

где $a(x) \in \mathscr{A}$, а $b(x)$ — β-правильно изменяется при $|x| \to \infty$.

В частном случае, когда

$$b(x) = \frac{q(e_x)\,|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+d-1)}, \qquad \alpha + d - 1 > 0,$$

где $\int_{S^{d-1}} q(e)(a(e))^{-\alpha-d+1}\chi_{d-1}(de) = 1$, получаем плотность

$$p(x) = g_\alpha(x; a, q) = \frac{q(e_x)|x|^{\alpha-1}e^{-a(x)}}{\Gamma(\alpha+d-1)}, \tag{2.2}$$

которую можно с полным основанием назвать d-мерной гамма-плотностью.

В отличие от одномерного случая параметрического семейства гамма-распре-
делений с общей плотностью вида

$$p(x) = g_\alpha(x;\lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad x > 0, \tag{2.3}$$

где $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, в многомерном случае плотности вида (2.2) образуют полупараметрическое семейство.

Гамма-распределение в $\mathbf{R}^1$, подобно нормальному, обладает свойством воспроизводимости при переходе к сопряженным распределениям. Точнее, пусть $p_s(x)$ — плотность, отвечающая сопряженному распределению P_s. Легко понять, что сопряженная к (2.5) плотность имеет вид

$$p_s(x) = g_\alpha^{(s)}(x;\lambda) = g_\alpha(x;\lambda - s), \qquad s < \lambda.$$

Аналогично этому при $d > 1$ и $p(x) = g_\alpha(x; a, q)$ производящая функция имеет вид

$$f(s) = \int_{S^{d-1}} q(e)(a(e) - \langle s, e\rangle)^{-\alpha-d+1}\,\chi_{d-1}(de),$$

и, следовательно,

$$p_s(x) = g_\alpha^{(s)}(x; a, q) = g_\alpha(x; a_s, q_s),$$

где

$$a_s(\varepsilon) = a(\varepsilon) - \langle s, \varepsilon\rangle, \quad q_s(\varepsilon) = \frac{q(\varepsilon)}{\int_{S^{d-1}} q(e)(a(e) - \langle s, e\rangle)^{-\alpha-d+1}\,\chi_{d-1}(de)}.$$

Таким образом, класс распределений (2.2) замкнут относительно преобразования Крамера — перехода к сопряженному распределению.

Из определения 2.2 и (2.4) нетрудно понять, что плотность вида (2.1), где $b(x)$ — $(\alpha-1)$-правильно изменяется с $\alpha > 1 - d$, при $|x| \to \infty$ с точностью до медленно изменяющейся функции ведет себя как введенная нами d-мерная гамма-плотность с $q(e) = \lambda(e)\,\Gamma(\alpha + d - 1)$. Поэтому такие плотности мы называем *асимптотически гамма-подобными* или просто *гамма-подобными.*

В дальнейшем всюду мы рассматриваем только такие плотности.

Легко понять, что класс гамма-подобных плотностей является достаточно богатым. Помимо d-мерных гамма-плотностей он содержит, например, эллипсоидальные плотности вида

$$p(x) = K_d(x^T A x)^{(\alpha-1)/2} \exp\big(-(x^T A x)^{1/2}\big), \qquad K_d > 0,$$

где A — положительно определенная матрица.

Если $a(x) \in \mathscr{A}$, а S — соответствующее ей, как опорной функции, ограниченное выпуклое множество, то, согласно определению,

$$a(x) = \sup_{y \in S} \langle y, x \rangle = |x| \sup_{y \in S} \langle y, e_x \rangle = |x| a(e_x), \qquad x \in \mathbf{R}^d.$$

Рассмотрим функцию

$$k(y) = \inf\{\lambda \geqslant 0\colon y \in \lambda S\}, \qquad y \in \mathbf{R}^d.$$

Известно (см., например, [30, гл. 3, § 15]), что

$$k(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle y, x \rangle}{a(x)} = |y| \sup_{e \in S^{d-1}} \frac{\langle e_y, e \rangle}{a(e)}.$$

Положим $h(e) = 1/k(e)$. Тогда множество внутренних точек S допускает представление

$$\operatorname{int} S = \{s\colon s = te,\ 0 \leqslant t < h(e)\}. \tag{2.4}$$

Заметим, что функции $a(e)$ и $k(y)$ иногда называют функциями Минковского.

В работе [19] была установлена форма области существования производящей функции $f(s) = \int \mathbf{R}^d e^{\langle s,x \rangle} p(x)\,dx$. Оказывается, если $p(x)$ имеет представление (2.1), где $a(x) \in \mathscr{A}$, а $b(x)$ — β-правильно изменяется при $|x| \to \infty$, то производящая функция $f(s)$ ограничена в $\operatorname{int} S$, где S — ограниченное выпуклое множество, содержащее начало координат, для которого $a(x)$ является опорной функцией. И наоборот, для любого ограниченного выпуклого множества S такого, что $0 \in \operatorname{int} S$, существует плотность вида (2.1), имеющая S областью существования $f(s)$.

Заметим, что при $\beta \geqslant -d$ область существования $f(s)$ открыта, поскольку $f(te) \to \infty$ при $t \to h(e)$. Если же $\beta < -d$, то $f(h(e)\,e) < \infty$, т.е. $f(s)$ конечна в замкнутой области $S = \{s\colon s = te,\ 0 \leqslant t \leqslant h(e)\}$. Как уже отмечалось во Введении, нас интересует случай открытого множества существования $f(s)$.

Перейдем теперь к формулировке основного результата нашей работы. Обозначим $\Delta_e(\varepsilon) = a(\varepsilon) - h(e)\,\langle e, \varepsilon \rangle$, где $h(e)$ имеет тот же смысл, что и в (2.6). Нам потребуются следующие предположения.

(A) *Для любого направления $e \in S^{d-1}$ множество* $\arg\min_{\varepsilon \in S^{d-1}\colon \langle e,\varepsilon \rangle > 0} [a(\varepsilon)/\langle e, \varepsilon \rangle]$ *содержит единственную точку $\varepsilon' = \varepsilon'(e)$.*

(B) *Для любого направления $e \in S^{d-1}$ функция $\Delta_e(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon'(e)$ допускает представление*

$$\Delta_e(\varepsilon) = 2^{-1}(\varepsilon - \varepsilon'(e))^T \Lambda_e (\varepsilon - \varepsilon'(e)) + w_e(\varepsilon),$$

где матрица Λ_e неотрицательно определена и имеет ранг $d-1$, а $|w_e(\varepsilon)| = o(|\varepsilon - \varepsilon'(e)|^2)$. При этом матрица Λ_e непрерывна по $e \in S^{d-1}$,

$\Lambda_e\varepsilon'(e)=0$ и

$$0<\min_{e\in S^{d-1}}\min_j\lambda_j(e)\leqslant\max_{e\in S^{d-1}}\max_j\lambda_j(e)<\infty,\qquad j=1,\dots,d-1,$$

где $\{\lambda_j(e)\}_{j=1}^{d-1}$ — ненулевые собственные числа Λ_e, а

$$\sup_{e\in S^{d-1}}\ \sup_{(\varepsilon:\,|\varepsilon-\varepsilon'(e)|\leqslant t)}|w_e(\varepsilon)|\leqslant w(t)=o(t^2),\qquad t\to 0.$$

(C) *Для любого направления $e\in S^{d-1}$ и всех достаточно малых $\delta>0$*

$$\min_{e\in S^{d-1}}\ \min_{(\varepsilon\in S^{d-1}:\,|\varepsilon-\varepsilon'(e)|>\delta)}\Delta_e(\varepsilon)=d(\delta)>0.$$

Теорема 2.1. *Если гамма-подобная плотность удовлетворяет условиям (A), (B) и (C), то справедливо* (1.2).

Прежде чем приступить к доказательству сформулированной теоремы, уместно заметить следующее.

Из условия (A), в частности, следует, что в каждой точке $\varepsilon'(e)$ существует только одна опорная гиперплоскость к S, т.е. граница выпуклой области S не имеет угловых точек. Более того, кривизна границы равномерно положительна и ограничена. Это справедливо, например, в случае, когда S — эллипсоид, но не имеет места в случае, когда, например, S — квадрат.

П р и м е р 1. Пусть

$$p(x)=b(x)e^{-(x^TBx)^{1/2}},\qquad x\in\mathbf{R}^d,$$

где функция $b(x)$ β-правильно изменяется при $|x|\to\infty$ с $\beta\geqslant -d$, а B — положительно определенная матрица.

Нетрудно видеть, что в этих условиях $a(e)=(e^TBe)^{1/2}$, $h(e)=(e^TB^{-1}e)^{-1/2}$, $e\in S^{d-1}$, т.е. область S представляет собой эллипсоид

$$S=\{s\in\mathbf{R}^d\colon s=te,\ 0\leqslant t<(e^TB^{-1}e)^{-1/2}\}.$$

В следующем примере граница области S имеет угловые точки.

П р и м е р 2. Пусть $d=2$, а

$$p(x)=b(x)\,e^{-|x_1|-|x_2|},\qquad x\in\mathbf{R}^2,$$

где функция $b(x)$ β-правильно изменяется при $|x|\to\infty$ с $\beta\geqslant -2$.

Нетрудно видеть, что в этих условиях $a(e)=|e_1|+|e_2|$, $h(e)=\min\{|e_1|^{-1},|e_2|^{-1}\}$, $e\in S^1$, т.е. множество S представляет собой квадрат

$$S=\Big\{(s_1,s_2)\colon \max\{|s_1|,|s_2|\}<1\Big\}.$$

Оказывается, что при $s \to s' \in \partial S$ поведение производящей функции $f(s)$ существенно зависит от того, является ли s' угловой точкой или нет. Разнообразие в поведении производящей функции вблизи границы области существования приводит к большему разнообразию предельных законов для сопряженных распределений. Изучению таких случаев будет посвящена отдельная работа.

3. Предельные теоремы для сопряженных распределений.

3.1. Теорема абелева типа. Условия (A), (B) и (C) являются равномерными аналогами так же обозначенных условий в [19]. Поэтому утверждение теоремы 1.3 из цитируемой работы выполняется равномерно по направлениям $e \in S^{d-1}$.

Имеет смысл привести точную формулировку равномерного аналога этой теоремы.

Рассмотрим семейство функций

$$f^{(e)}(\tau) = f([h(e) - \sigma(e)\,\tau]\,e), \qquad e \in S^{d-1},$$

где $0 < \tau < \min_{e\in S^{d-1}} \sigma^{-1}(e)\,h(e) = \min_{e\in S^{d-1}} a(e)$, а $\sigma(e) = \langle \varepsilon'(e), e\rangle^{-1}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $p(x)$ *гамма-подобна с* $\alpha > -(d-1)/2$ *и выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Тогда при* $\tau \downarrow 0$

$$\sup_{e\in S^{d-1}} \left| \frac{\tau^{\alpha+(d-1)/2} f^{(e)}(\tau)}{l(\tau^{-1})} - c_\alpha g(e) \right| = o(1),$$

где $c_\alpha = \Gamma(\alpha + (d-1)/2)(2\pi)^{(d-1)/2}$, *а*

$$g(e) = \lambda(\varepsilon'(e))\,(\lambda_1(e)\cdots\lambda_{d-1}(e))^{-1/2} = \lambda(\varepsilon'(e))(\det(\overline{\Lambda}_e^{(0)}))^{-1/2},$$

$\overline{\Lambda}_e^{(0)} = \operatorname{diag}(\lambda_1(e), \ldots, \lambda_{d-1}(e))$.

Пусть $e_\tau \to e$ при $\tau \to 0$. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\left| \frac{\tau^{\alpha+(d-1)/2} f^{(e_\tau)}(\tau)}{l(\tau^{-1})} - c_\alpha g(e) \right| = o(1)$$

при любой скорости приближения e_τ к пределу. Это означает, что нами установлена сильная форма абелевой теоремы, в которой нет ограничений на характер сближения аргумента с границей области существования производящей функции.

Положим для $q > 1$

$$I_q(s) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{\langle s,x\rangle} p(x)\right)^q dx,$$
$$I_q^{(e)}(\tau) = I_q((h(e) - \sigma(e)\,\tau)\,e), \qquad e \in S^{d-1}, \quad 0 < \tau < \min_{e\in S^{d-1}} a(e).$$

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, приводящие к утверждению теоремы 1.3 в [19] и теоремы 3.1, можно показать, что при $q(\alpha-1)+(d+1)/2>0$ и $\tau\downarrow 0$

$$\sup_{e\in S^{d-1}}\left|\frac{\tau^{q(\alpha-1)+(d+1)/2}I_q^{(e)}(\tau)}{l^q(\tau^{-1})}-c_{\alpha q}g_q(e)\right|=o(1), \tag{3.1}$$

где

$$c_{\alpha q}=\Gamma\biggl(q(\alpha-1)+\frac{d+1}{2}\biggr)\,q^{-q(\alpha-1)-d}(2\pi)^{(d-1)/2},$$
$$g_q(e)=\lambda^q(\varepsilon'(e))(\lambda_1(e)\cdots\lambda_{d-1}(e))^{-1/2}.$$

Это предельное соотношение нам понадобится позже.

Следуя доказательству теоремы 1.3 в [19] и теоремы 3.1 нетрудно также показать, что при $s=(h(e)-\sigma(e)\,\tau)\,e$, $\tau\downarrow 0$, для всех $i=1,\dots,d$

$$\sup_{e\in S^{d-1}}\left|\frac{\tau^{\alpha+(d+1)/2}\partial f(s)/\partial s_i}{l(\tau^{-1})}-c'_\alpha g(e)\,\varepsilon'_i(e)\right|=o(1),$$

где $c'_\alpha=\Gamma(\alpha+(d+1)/2)(2\pi)^{(d-1)/2}$, а $\varepsilon'(e)=(\varepsilon'_1(e),\dots,\varepsilon'_d(e))^T$. Вместе с теоремой 3.1 это дает

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{e\in S^{d-1}}\left|\tau\gamma((h(e)-\sigma(e)\,\tau)\,e)-\biggl(\alpha+\frac{d-1}{2}\biggr)\,\varepsilon'(e)\right|=0, \tag{3.2}$$

где, напоминаем, $\gamma(s)=\operatorname{grad}\ln f(s)$ — вектор средних для сопряженного распределения.

3.2. Предельные теоремы для сопряженных распределений. В работах [12], [16], [17] изучались вероятности больших уклонений произвольно высокого порядка для сумм скалярных случайных величин. При этом оказалось, что важно знать поведение сопряженного распределения вблизи границы области изменения параметра s. В частности, было установлено, что при соответствующей нормировке сопряженное распределение сходится либо к нормальному, либо к гамма-распределению. Разумеется, это происходит при определенной правильности изменения хвостов исходного распределения.

Здесь мы показываем, что нечто подобное имеет место и в случае многомерных сопряженных распределений. Во всяком случае, гамма-подобные распределения приводят к весьма интересным предельным законам для сопряженных к ним распределений.

Пусть $p^{(s)}(x)$ – плотность сопряженного распределения P_s, т.е.

$$p^{(s)}(x)=\frac{e^{\langle s,x\rangle}p(x)}{f(s)},\qquad x\in\mathbf{R}^d,\quad s\in S.$$

Рассмотрим ортогональное преобразование C_e, которое переводит вектор $\varepsilon^{(d)}=(0,\dots,0,1)^T$ в $\varepsilon'(e)$, т.е. $C_e\varepsilon^{(d)}=\varepsilon'(e)$. Положим $\overline{x}=C_e^Tx$, и пусть $p^{(s)}(C_e\overline{x}) = p_e^{(s)}(\overline{x})$. Если случайный вектор ξ имеет плотность распределения $p^{(s)}(x)$, то, как легко понять, $p_e^{(s)}(x)$ отвечает случайному вектору $\bar{\xi} = C_e^T\xi$.

Обозначим векторы из первых $d-1$ компонент $\bar{\xi}$ и $\overline{x}$, соответственно, η и y. Последние же компоненты условимся обозначать, соответственно, ζ и z. Таким образом,

$$\bar{\xi} = (\eta, \zeta), \quad \overline{x} = (y, z), \quad p_e^{(s)}(\overline{x}) = p_e^{(s)}(y, z).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *при* $s = [h(e) - \sigma(e)\,\tau]\,e$, $\tau \downarrow 0$, *и любом* $\delta > 0$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{y \in R^{d-1}, z \geqslant \delta} \left| \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y, z) \right| = o(1),$$

где

$$\pi_e(y, z) = \frac{z^{\alpha + (d-3)/2} e^{-z}}{\Gamma(\alpha + (d-1)/2)} \, \varphi_{B_{e,z}}(y),$$

а $\varphi_{B_{e,z}}$ *— плотность* $(d-1)$*-мерного нормального распределения с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей* $B_{e,z} = z(\overline{\Lambda}_e^{(0)})^{-1}$.

Прежде чем доказывать сформулированную теорему, сделаем ряд замечаний.

Нетрудно понять, что последняя компонента случайного вектора, имеющего плотность распределения $\pi_e(y, z)$, распределена по закону гамма с параметром формы $\alpha + (d-1)/2$. В то же время условное распределение первых $d-1$ компонент при условии, что последняя принимает значение z, является $(d-1)$-мерным нормальным с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $B_{e,z}$. Последнее означает, что маргинальное распределение первых $d-1$ компонент представляет собой смесь нормальных распределений, в которой в качестве параметра смеси выступает масштаб, а весовой функцией является плотность упомянутого гамма-распределения.

Утверждение теоремы допускает простую интерпретацию. Представим случайный вектор ξ, имеющий $p^{(s)}(x)$ плотностью своего распределения, в виде

$$\xi = \xi' + \langle \xi, \varepsilon'(e) \rangle \, \varepsilon'(e).$$

Из сформулированной теоремы следует, что при $s = [h(e) - \sigma(e)\,\tau]\,e$, $\tau \downarrow 0$, составляющая $\langle \xi, \varepsilon'(e) \rangle$ имеет в качестве предельного закона гамма-распределение, тогда как вектор ξ' — смесь $(d-1)$-мерных нормальных распределений.

Нетрудно также понять, что нельзя без дополнительных ограничений, налагаемых на α, снять в теореме 3.2 ограничения снизу на z.

Действительно, при $x = 0$, согласно теореме 1.3 в [19], имеем

$$\tau^{-(d+1)/2} p^{(s)}(0) = \frac{\tau^{-(d+1)/2} p(0)}{f(s)} \sim \frac{c\tau^{\alpha-1}}{l(\tau^{-1})},$$

если, разумеется, $0 < p(0) < \infty$ (ср. с леммой 5 в [17]).

Доказательство теоремы 3.2. Далее на протяжении оставшейся части работы c будет обозначать положительную постоянную, конкретное значение которой для нас неважно, т.е. считается, что $c{+}c = c$, $c^2 = c$ и т.д. Через $\omega(t)$ будем обозначать произвольную неотрицательную функцию такую, что $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$, а через θ — любую величину, принимающую значения из интервала $[-1, 1]$.

Зафиксируем $\delta > 0$, после чего запишем

$$\begin{aligned} S &= \sup_{e\in S^{d-1}} \sup_{y\in R^{d-1},\ z\geqslant\delta} \left|\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y,z)\right| \\ &= \sup_{e\in S^{d-1}} \max(S_1, S_2), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sup_{x=(y,z)\colon x\in Y'_{12}} \left|\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y,z)\right|, \\ S_2 &= \sup_{x=(y,z)\colon x\notin Y'_{12}, z\geqslant\delta} \left|\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y,z)\right|, \end{aligned}$$

а $Y'_{12} = \{x = (y,z)\colon |y| \leqslant M,\ \delta \leqslant z \leqslant N\}$, где M и N — произвольно большие положительные числа.

Для $x = (y,z) \in Y_{12} = \{x\colon |y| \leqslant M\tau^{-1/2},\ \delta \leqslant z\tau \leqslant N\}$ имеем (см. оценку $f_{12}(s)$ в доказательстве теоремы 1.3 в [19])

$$\overline{\varepsilon} = z^{-1} y \tau^{1/2} + O(\tau^{3/2}), \quad \varepsilon_d = 1 + O(\tau), \quad \sigma(e) = e_d^{-1} + O(\tau),$$

и, следовательно,

$$\overline{\varepsilon}^T \overline{\Lambda}_e^{(0)} \overline{\varepsilon} = \tau z^{-2} y^T \overline{\Lambda}_e^{(0)} y + o(\tau), \quad \tau\sigma(e)\langle e, \varepsilon\rangle = \tau + O(\tau^{3/2}).$$

Поэтому $\langle s, x\rangle - a(x) = -z - (2z)^{-1} y^T \overline{\Lambda}_e^{(0)} y + o(1)$, откуда ввиду теоремы 3.1 и (2.1), где, напоминаем, $\beta = \alpha - 1$, получаем $\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) = \pi_e(y,z) + o(1)$ равномерно по $x \in Y'_{12}$ и, конечно же, по $e \in S^{d-1}$. Таким образом,

$$S_1 = o(1) \tag{3.4}$$

равномерно по $e \in S^{d-1}$.

Приступим к оценке S_2 в (3.3). Легко видеть, что

$$S_2 \leqslant \sup_{x\notin Y'_{12}, z\geqslant\delta} \pi_e(y,z) + \sup_{x\notin Y'_{12}, z\geqslant\delta} \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) = S_{21} + S_{22}. \tag{3.5}$$

Далее, из определения $\pi_e(y,z)$ следует, что

$$S_{21} \leqslant c \sup_{z>N}(z^{\alpha'-1}e^{-z}) + c\sup_{z\geqslant\delta}(z^{\alpha'-1}e^{-z-cM^2z^{-1}}), \qquad \alpha' = \alpha + \frac{d-1}{2}.$$

Поскольку δ зафиксировано, то

$$\begin{aligned}\sup_{z\geqslant\delta}(z^{\alpha'-1}e^{-z-cM^2z^{-1}}) &\leqslant \sup_{z\geqslant\delta}(z^{\alpha'-1}e^{-z/2})\sup_{z>0}(e^{-z/2-cM^2z^{-1}}) \\ &= e^{-cM}\sup_{z\geqslant\delta}(z^{\alpha'-1}e^{-z/2}) = \omega(M).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{21} \leqslant \omega(M) + \omega(N). \tag{3.6}$$

Воспользуемся обозначениями X_2, X_3, X_{12} и X_{13} из доказательства теоремы 1.3 в [19], поменяв в них только местами δ и δ'. Заметим, что область Y'_{12}, очевидным образом связанная с Y_{12}, отвечает области X_{12} в доказательстве теоремы 1.3 в [19]. Не ограничивая общности, можно считать, что $X_{12} \subset Y_{12}$, т.е. $\mathbf{R}^d \setminus Y_{12} \subset \mathbf{R}^d \setminus X_{12}$, откуда

$$S_{22} \leqslant \max(S', S'', S'''), \tag{3.7}$$

где справа стоят супремумы от $\tau^{-(d+1)/2}p_e^{(s)}(y,z)$ по областям X'_2, X'_3 и X_{13} соответственно, где $X'_i = X_i \cap (x\colon z \geqslant \delta\tau^{-1})$, $i = 2,3$. При $x \in X'_2$ имеем

$$\langle s,x\rangle - a(x) \leqslant -cM^2\tau|x|, \qquad b(x) \leqslant c|x|^{\alpha-1}l(|x|^{-1}),$$

откуда, согласно (2.1) и теореме 3.1,

$$\begin{aligned}\tau^{-(d+1)/2}p_e^{(s)}(x) &\leqslant c(\tau|x|)^{\alpha-1}\frac{l(|x|)}{l(1/\tau)}e^{-cM^2\tau|x|} \\ &\leqslant c(\tau|x|)^{\alpha-1}\max\left((\tau|x|)^{\eta},\ (\tau|x|)^{-\eta}\right)e^{-cM^2\tau|x|} = \omega(M), \qquad \eta > 0.\end{aligned}$$

Напомним, что δ фиксировано, а $\tau|x| \geqslant \delta$. Таким образом, $S' \leqslant \omega(M)$ равномерно по $e \in S^{d-1}$. При $x \in X'_3$ в соответствии с условием (C) имеем при всех достаточно малых τ

$$\langle s,x\rangle - a(x) \leqslant -c|x|, \qquad b(x) \leqslant c|x|^{\alpha-1}l(|x|^{-1}),$$

С помощью (2.1) и теоремы 3.1 получаем

$$\tau^{-(d+1)/2}p_e^{(s)}(x) \leqslant c\sup_{u\geqslant\delta}(u^{\alpha-1}\max(u^{\eta},\ u^{-\eta})e^{-(c/\tau)u}) = o(1), \qquad \eta > 0.$$

Иными словами, $S'' = o(1)$ равномерно по $e \in S^{d-1}$. Если же $x \in X_{13}$, то

$$\tau^{-(d+1)/2}p_e^{(s)}(x) \leqslant c(\tau|x|)^{\alpha-1+\eta}\frac{l(|x|)}{l(\tau^{-1})}\,e^{-c\tau|x|} \leqslant \omega(M), \qquad \eta > 0.$$

Тем самым, для всех достаточно малых τ получаем

$$S_{22} \leqslant \omega(\min(M, N)) \tag{3.8}$$

равномерно по $e \in S^{d-1}$.

Собирая вместе (3.3)–(3.8), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Несложные вычисления показывают, что ковариационная матрица, отвечающая $\pi_e(y, z)$, имеет вид

$$\Sigma_e = \left(\alpha + \frac{d-1}{2}\right) \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}(e), \ldots, \lambda_{d-1}^{-1}(e), 1).$$

Положим

$$D_\tau = \operatorname{diag}(\tau^{1/2}, \ldots, \tau^{1/2}, \tau).$$

Из теоремы 3.2 следует, что случайный вектор $\xi_s = \Sigma_e^{-1/2} D_\tau C_e^T \xi$ сходится по P_s-распределению к случайному вектору с единичной ковариационной матрицей, плотность которого имеет вид

$$\pi(y, z) = \frac{1}{\sigma} \frac{(z/\sigma)^{\alpha+(d-3)/2}\, e^{-z/\sigma}}{\Gamma(\alpha + (d-1)/2)} \varphi_{\sigma z I}(y), \qquad y \in \mathbf{R}^{d-1}, \quad z \in \mathbf{R}^1_+, \tag{3.9}$$

где I — единичная матрица, а $\sigma = (\alpha + (d-1)/2)^{-1/2}$.

С другой стороны, случайный вектор $\xi'_s = B^{-1/2}(s)\,\xi$, где $B(s)$ — ковариационная матрица, отвечающая $p^{(s)}(x)$, также имеет единичную ковариационную матрицу. Однако пока ничего не известно о сходимости этого вектора. Заметим попутно, что положительно определенная матрица $B(s)$ допускает представление $B(s) = C(s)\, B_0(s)\, C^T(s)$, где ортогональная матрица $C(s)$ и диагональная матрица $B_0(s)$ составлены, соответственно, из собственных векторов и соответствующих им собственных чисел. Поскольку матрица $B(s)$ непрерывна в S, то матрицы $C(s)$ и $B_0(s)$ тоже непрерывны (см., например, [11, гл. 7]).

Сходимость по распределению ξ'_s устанавливается в следующих двух леммах.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Тогда при* $s = [h(e) - \sigma(e)\,\tau]\, e$, $\tau \downarrow 0$,

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \|D_\tau C_e^T B(s)\, C_e D_\tau - \Sigma_e\| = o(1),$$

где $B(s)$ *— ковариационная матрица, отвечающая* $p^{(s)}(x)$, *а* $\|\cdot\|$ *— любая из норм матрицы.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.2 достаточно установить равномерную интегрируемость $\xi'_s = D_\tau C_e^T \xi$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}_s |\xi'_s|^2 = \int (\tau |y|^2 + \tau^2 z^2)\, p_e^{(s)}(y, z)\, dy\, dz,$$

или, вспоминая определение $p_e^{(s)}(y,z)$,

$$\mathbf{E}_s|\xi_s'|^2 = \frac{1}{f(s)}\int (\tau|y|^2+\tau^2z^2)\,p(C_e\overline{x})\,e^{\langle s, C_e\overline{x}\rangle}\,d\overline{x},$$

где $\overline{x}=(y_1,\dots,y_{d-1},z)=(y,z)$.

Рассмотрим

$$\bar f(s) = \int (\tau|y|^2+\tau^2z^2)\,p(C_e\overline{x})\,e^{\langle s, C_e\overline{x}\rangle}\,d\overline{x}.$$

Пусть области X_i, $i=1,\dots,4$, X_{1i}, $i=1,2,3$, те же, что и в доказательстве теоремы 1.3 в [19]. Обозначим через $\bar f_i(s), \bar f_{1i}(s)$ части интеграла $\bar f(s)$, отвечающие указанным областям. Необходимо показать, что все отношения $\bar f_i(s)/f(s)$, $\bar f_{1i}(s)/f(s)$, кроме $\bar f_{12}(s)/f(s)$, могут быть сделаны произвольно малыми. Заметим, что интегралы $\bar f_i(s), \bar f_{1i}(s)$ оцениваются почти дословно так же, как соответствующие им интегралы $f_i(s), f_{1i}(s)$. Например, при оценке $\bar f_2(s)$ следует воспользоваться очевидным неравенством

$$|y|^2+\tau x^2 \leqslant cr^2(|\overline{\varepsilon}|^2+\tau), \qquad x\in X_2,$$

где $x=(y,z)=r\varepsilon$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)^T$, $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{d-1})^T$. Далее,

$$\bar f_2(s) \leqslant c\tau\int_L^\infty r^{\alpha+d}l(r)\,e^{-c\tau r}\left(\int_{|\overline{\varepsilon}|\geqslant M\tau^{1/2}} |\overline{\varepsilon}|^2\exp(-cr|\overline{\varepsilon}|^2)\,d\overline{\varepsilon}\right)dr$$
$$+\,c\tau^2\int_L^\infty r^{\alpha+d}l(r)\,e^{-c\tau r}\left(\int_{|\overline{\varepsilon}|\geqslant M\tau^{1/2}} \exp(-cr|\overline{\varepsilon}|^2)\,d\overline{\varepsilon}\right)dr.$$

Рассуждая так же, как и при оценке $f_2(s)$ в доказательстве теоремы 1.3 в [19], получаем $\bar f_2(s)\leqslant \tau^{-\alpha-(d-1)/2}l(\tau^{-1})\,\omega(M)$, откуда ввиду теоремы 3.1 $\bar f_2(s)/f(s)\leqslant\omega(M)$. Столь же просто оцениваются и остальные соотношения. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{C}_0$ объединяет все ортогональные $d\times d$-матрицы, имеющие последнюю строку, а следовательно, и столбец, вида $(0,\dots,0,a)$ с $|a|=1$. Ясно, что плотность $\pi(y,z)$ инвариантна относительно преобразований $C\in\mathscr{C}_0$.

Лемма 3.2. *Положим* $\overline{p}^{(s)}(x)=(\det B(s))^{1/2}p^{(s)}(B^{1/2}(s)x)$. *В условиях теоремы* 3.2

$$\lim_{s\to\partial S}\sup_{x_d\geqslant\delta}|\overline{p}^{(s)}(x)-\pi(x)|=0.$$

Доказательство. Пусть $\tau=\tau(s)=(h(e_s)-|s|)/\sigma(e_s)$. Из леммы 3.1 следует, что

$$C_e^T B(s)\,C_e=\tau^{-1}\Sigma(s),$$

где

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_1 + o(1) & \dots & o(1) & o(\tau^{-1/2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o(1) & \dots & \sigma_{d-1} + o(1) & o(\tau^{-1/2}) \\ o(\tau^{-1/2}) & \dots & o(\tau^{-1/2}) & \sigma_d \tau^{-1} + o(\tau^{-1}) \end{pmatrix},$$

а σ_j, $j = 1, \dots, d$, — элементы диагональной матрицы Σ_e. Непосредственной проверкой убеждаемся, что собственные значения матрицы $B(s)$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_j(s) = \sigma_j \tau^{-1}(1 + o(1)), & j = 1, \dots, d-1, \\ \beta_d(s) = \sigma_d \tau^{-2}(1 + o(1)). \end{cases} \tag{3.10}$$

С другой стороны, как уже отмечалось, $B(s) = C(s)\, B_0(s)\, C^T(s)$, где $B_0(s) = \mathrm{diag}(\beta_1(s), \dots, \beta_d(s))$, а ортогональная матрица $C(s)$ составлена из собственных векторов матрицы $B(s)$. Из леммы 3.1 следует, что

$$\begin{cases} \tau(c_{i1}c_{j1}\beta_1 + \dots + c_{id}c_{jd}\beta_d) = \sigma_i \delta_{ij} + o(1), & i, j = 1, \dots, d-1, \\ \tau^{3/2}(c_{i1}c_{d1}\beta_1 + \dots + c_{id}c_{dd}\beta_d) = o(1), & i = 1, \dots, d-1, \\ \tau^2(c_{d1}^2\beta_1 + \dots + c_{dd}^2\beta_d) = \sigma_d + o(1), \end{cases} \tag{3.11}$$

где $\beta_j = \beta_j(s)$, а $c_{ij} = c_{ij}(s)$, $i, j = 1, \dots, d$, — элементы матрицы $C_e^T C(s)$.

Из (3.10) и (3.11) следует, что

$$c_{dd}^2 = 1 + o(1), \quad c_{id} = o(\tau^{1/2}), \qquad i = 1, \dots, d-1,$$

и, значит, $c_{dj} = o(\tau^{1/2})$, $j = 1, \dots, d-1$. Таким образом,

$$\lim_{s \to \partial S} \min_{C \in \mathscr{C}_0} \|C_e^T C(s) - C\| = 0. \tag{3.12}$$

Положим

$$B^{1/2}(s) = C(s) B_0^{1/2}(s), \qquad R(s) = \Sigma_e^{-1/2} D_\tau C_e^T.$$

Пусть при $s = s_k$ последовательности $R(s_k)B^{1/2}(s_k)$ и $C_{e_k}^T C(s_k)$ сходятся, соответственно, к C' и C''. Ввиду (3.12) имеем $C'' \in \mathscr{C}_0$. Тогда $C' = \lim_{k\to\infty} \Sigma_{e_k}^{-1/2} D_{\tau_k} C'' B_0^{1/2}(s_k)$, и, следовательно, $C' \in \mathscr{C}_0$. Далее ввиду леммы 3.1 при $s \to \partial S$ $(\det B(s))^{1/2} \det R(s) \longrightarrow 1$. Но тогда

$$\begin{aligned} &\sup_{x_d \geqslant \delta > 0} \left| (\det B(s))^{1/2} p^{(s)} \left(B^{1/2}(s)\, x \right) - \pi(x) \right| \\ &\quad \leqslant \sup_{x_d \geqslant \delta > 0} \Big| (\det B(s))^{1/2} p^{(s)} \left(R^{-1}(s) R(s) B^{1/2}(s) x \right) \\ &\qquad\qquad - (\det B(s))^{1/2} \det R(s)\, \pi \left(R(s) B^{1/2}(s) x \right) \Big| \\ &\quad + \sup_{x_d \geqslant \delta > 0} \left| (\det B(s))^{1/2} \det R(s)\, \pi \left(R(s)\, B^{1/2}(s) x \right) - \pi(x) \right| = o(1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\sup_{s\in S}\sup_{u\in\mathbf{R}^d}\left|(2\pi n)^{d/2}(\det B(s))^{1/2} p_{ns}(n^{1/2}B^{1/2}(s)\,u + n\gamma(s)) - e^{-|u|^2/2}\right| = o(1).$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\psi_s(t) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{\imath\langle t,x\rangle}\overline{p}^{(s)}(x)\,dx, \qquad t \in \mathbf{R}^d,$$

отвечающую плотности $\overline{p}^{(s)}(x)$.

Из леммы 3.2 немедленно получаем (ср. с (17)–(19) в [17]) следующие соотношения: при $n \to \infty$ для любого $T > 0$

$$\sup_{s\in S}\sup_{|t|<T}\left|\psi_s^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\,|t|^2\right)\right| = o(1); \tag{3.13}$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$ существует $c_\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{s\in S}|\psi_s(t)| \leqslant 1 - c_\delta|t|^2, \qquad 0 < |t| \leqslant \delta; \tag{3.14}$$

для любого $\delta > 0$

$$\sup_{s\in S}\sup_{|t|>\delta}|\psi_s(t)| = \rho_\delta < 1. \tag{3.15}$$

Остается показать, что существует $n_0 > 1$ такое, что $|\psi_s(t)|^{n_0}$ интегрируема равномерно по $s \in S$. Представим s, как и прежде, в виде

$$s = (h(e) - \sigma(e)\,\tau)\,e, \qquad 0 < \tau < \min_{e\in S^{d-1}} a(e).$$

Из (2.1) имеем

$$p^{(s)}(x) = \frac{b(x)\exp\{-|x|(\Delta_e(e_x) + \tau\sigma(e)\,\langle e, e_x\rangle)\}}{f((h(e) - \tau\sigma(e))\,e))}.$$

Из условий (A) и (C) следует, что $\sup_{e\in S^{d-1}}\sup_{\tau>\tau_0}\sup_x \overline{p}^{(s)}(x) < \infty$ для любого $\tau_0 > 0$. Это означает, что для любого $\tau_0 > 0$

$$\sup_{e\in S^{d-1}}\sup_{\tau>\tau_0}\int_{\mathbf{R}^d}|\psi_s(t)|^2\,dt < \infty. \tag{3.16}$$

Далее,

$$\int(\overline{p}^{(s)}(x))^q\,dx = (\det B(s))^{(q-1)/2}(f(s))^{-q}\,I_q(s),$$

где $I_q(s)$ то же, что и в (3.1), а

$$1 < q < \min(2, q_\alpha), \qquad q_\alpha^{-1} = 1 - \left(\alpha + \frac{d-1}{2}\right)\left(\frac{d+1}{2}\right)^{-1}.$$

Из теоремы 3.1, а также из (3.1) и (3.10) следует, что существует конечный предел $\lim_{s\to\partial S}\int(\overline{p}^{(s)}(x))^q\,dx$. Последнее в свою очередь означает (см., например, [5, с. 199])

$$\limsup_{s\to\partial S}\int|\psi_s(t)|^{q/(q-1)}\,dt<\infty.$$

Таким образом, при $n_0\geqslant q/(q-1)$

$$\sup_{s\in S}\int|\psi_s(t)|^{n_0}\,dt<\infty. \tag{3.17}$$

Доказательство теоремы следует теперь из соотношений (3.13)–(3.17) (ср., например, [9, гл. 4, § 3]). Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2.1 и ее статистическая интерпретация.

4.1. Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим хорошо известное тождество

$$p_n(nx)=f^n(s)e^{-n\langle s,x\rangle}\,p_{ns}(nx),\qquad s\in S,$$

где, напомним, $p_n(x)$ и $p_{ns}(x)$ — плотности распределения суммы S_n относительно P_0 и P_s, соответственно.

При $x\in X$, $x=\gamma(s)$, получаем $p_n(nx)=\rho^n(x)\,p_{ns}(n\gamma(s))$. Из теоремы 3.3 следует, что

$$\sup_{x\in X}\left|\frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)}-1\right|=o(1).$$

Покажем, что $X=\mathbf{R}^d$. Поскольку S открыто, то и X открыто. Пусть $X\neq\mathbf{R}^d$, т.е. существует $x^*\notin X$, $x^*\in\partial X$, $|x^*|<\infty$. Возьмем произвольную последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $x^{(k)}\in X$, такую, что $x^{(k)}\to x^*$, $k\to\infty$. Пусть $s^{(k)}\in S$ таковы, что $\gamma(s^{(k)})=x^{(k)}$. Поскольку замыкание S компактно, то из последовательности $\{s^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{s^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть s^* — предел этой последовательности. Поскольку x^* лежит на границе X, то $s^*\in\partial S$. Но тогда, ввиду (3.2), вопреки нашему предположению должно быть $|\gamma(s^*)|=|x^*|=\infty$. Таким образом, действительно, $X=\mathbf{R}^d$, и, следовательно, имеет место (1.2).

4.2. Статистическая интерпретация теоремы 2.1. С точки зрения математической статистики, семейство сопряженных распределений может рассматриваться как экспоненциальное. При этом $s\in S$ выступает в качестве оцениваемого параметра. Независимые случайные векторы $\xi^{(j)}$, $j=1,\dots,n$, образуют выборку объема n. Отвечающая ей функция правдоподобия имеет вид

$$\boldsymbol{p}_n(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n)};s)=\prod_{j=1}^{n}p(\xi^{(j)};s),$$

где $p(x;s) = e^{\langle s,x\rangle} p(x)/f(s)$. или

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(n)};s) &= f^{-n}(s)\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\langle s,\xi^{(j)}\rangle\right)\prod_{j=1}^{n}p(\xi^{(j)})\\ &= f^{-n}(s)\,\exp(n\langle s,\bar{\xi}\rangle)\prod_{j=1}^{n}p(\xi^{(j)}),\end{aligned}$$

где $\bar{\xi} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\xi^{(j)}$. Согласно критерию факторизации (см., например, теорему 1.1.1 в [10]), статистика $\bar{\xi}$ достаточна для параметра s. При этом информационная матрица Фишера, отвечающая единичному наблюдению, совпадает с ковариационной матрицей $B(s)$.

В качестве оценки максимального правдоподобия выступает статистика $s^* = s(\bar{\xi})$, где, напоминаем, $s(x)$ — вектор-функция, обратная $\gamma(s) = \operatorname{grad}\ln f(s)$.

Пусть S_ε — замкнутое подмножество $\operatorname{int} S$, определяемое следующим образом:

$$S_\varepsilon = \{s\colon s = te,\ 0 \leqslant t \leqslant h(e) - \varepsilon\}.$$

Легко проверить, что выполнены все условия так называемой локальной асимптотической нормальности (см., например, теорему 2.1.1 в [10]). Это означает, что логарифм отношения правдоподобия в близких точках вида s и $s + n^{-1/2}B^{-1/2}(s)\,t$, $t \in \mathbf{R}^d$, допускает представление

$$\begin{aligned}\ln\frac{\boldsymbol{p}(\,\cdot\,;s+n^{-1/2}B^{-1/2}(s)\,t)}{\boldsymbol{p}(\,\cdot\,;s)} &= n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\langle B^{-1/2}(s)(\xi^{(j)}-\gamma(s)),t\rangle\\ &\quad -\frac{1}{2}\,t^T t + \Delta_n(s,t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где функция $\Delta_n(s,t)$, в отличие от остаточного члена в теореме 2.1.1 [10], неслучайна и

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|<T}\sup_{s\in S_\varepsilon}|\Delta_n(s,t)| = 0.$$

Представление (4.1) справедливо для любой плотности, удовлетворяющей условию Крамера с областью S. Возникает вопрос: *нельзя ли распространить* (4.1) *на все множество S, по крайней мере, для случая гамма-подобных исходных распределений*? теоремы 3.1 и 3.2 позволяют утвердительно ответить на этот вопрос. Не приводя деталей доказательства, отметим следующие существенные моменты.

Пусть $\widehat{s} = \arg\min_{s'\in\partial S}|s - s'|$ для $s \in \operatorname{int} S$. Из теоремы 3.1 можно вывести, что при $s \to \partial S$

$$|\widehat{s} - s| \asymp \|B^{-1/2}(s)\|,$$

т.е. при любом T и всех достаточно больших n точки $s+n^{-1/2}B^{-1/2}(s)\,t$, $|t|\leqslant T$, лежат в S. Более того, при $s\to\partial S$, $s'=s+o(|\widehat{s}-s|)$,

$$B^{-1/2}(s)\,B(s')\,B^{-1/2}(s)=I+o(1).$$

Тогда (4.1) имеет место с $\Delta_n(s,t)$, удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|<T}\sup_{s\in S}|\Delta_n(s,t)|=0.$$

Тем самым, получается любопытный пример локальной асимптотической нормальности, равномерной по *открытому* параметрическому множеству.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алешкявичене А. К.* Многомерные интегральные предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 62–82.
2. *von Bahr B.* Multi-dimensional integral limit theorems for large deviations, Ark. Mat., 1967, v. 7, p. 89–99.
3. *Боровков А. А.*, *Рогозин Б. А.* О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.
4. *Боровков А. А.*, *Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. I: Большие уклонения сумм случайных векторов. — Труды Ин-та математики СО РАН, 1992, т. 3, с. 1–63.
5. *Бхаттачария Р. Н.*, *Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 288 с.
6. *Dembo A.*, *Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993, 346 p.
7. *Deuschel J.-D.*, *Stroock D. W.* Large Deviations. Boston: Academic Press, 1989, 307 p.
8. *Ellis R. J.* Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1985, 364 p.
9. *Ибрагимов И. А.*, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
10. *Ибрагимов И. А.*, *Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
11. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
12. *Нагаев А. В.* Большие уклонения для одного класса распределений. — Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 55–68.
13. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы для сумм независимых двумерных случайных векторов. Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, с. 83–89.
14. *Нагаев А. В.* Локальные предельные теоремы специального вида, учитывающие большие уклонения. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем., 1970, т. 14, в. 1, с. 29–34.
15. *Нагаев А. В.*, *Сакоян С. К.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, в R^k. — Докл. АН СССР, 1972, т. 204, в. 3, с. 554–556.
16. *Нагаев А. В.*, *Ходжабагян С. С.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения для сумм положительных случайных величин. — Литов. матем. сб., 1974, т. 14, в. 1, с. 149–163.
17. *Нагаев А. В.* Большие уклонения для сумм решетчатых случайных величин при выполнении условия Крамера. — Дискретн. Матем., 1998, т. 10, в. 3, с. 115–130.

18. *Нагаев А. В.* Крамеровские большие уклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
19. *Nagaev A. V.*, *Zaigraev A.* Abelian theorems for a class of probability distributions in $\mathbf{R}^d$ and their application. — J. Math. Sci. (New York), 2000, v. 99, № 4, p. 1454–1462.
20. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
21. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
22. *Ney P.* Dominating points and the asymptotics of large deviations for random walk on $\mathbf{R}^d$. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 1, p. 158–167.
23. *Osipov L. V.* On large deviations for sums of random vectors in $\mathbf{R}^k$. — J. Multivariate Anal., 1981, v. 11, № 2, p. 115–126.
24. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
25. *Resnick S. I.* Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1987, 320 p.
26. *Рихтер В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Докл. АН СССР, 1957, т. 115, с. 53–56.
27. *Rozovsky L. V.* On probabilities of large deviations in some classes of k-dimensional Borel sets. — J. Multivariate Anal., 1985, v. 17, № 1, p. 1–26.
28. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений на всей оси. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 79–109.
29. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений суммы независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения несимметричного устойчивого закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 496–530.
30. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 468 с.
31. *Саулис Л.*, *Статулявичюс В.* Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 208 с.
32. *Светулявичене В. К.* О вероятностях больших уклонений для сумм случайных векторов. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, в. 2, с. 191–199.

Поступила в редакцию
4.IV.2000

Исправленный вариант
23.I.2001