Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wydział Matematyki i Informatyki

Krzysztof Frączek

Analiza Matematyczna II

Wykład dla studentów II roku
kierunku informatyka

Toruń 2016

Spis treści

1 Przestrzenie metryczne

ułożył

Definicja. Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, ρ), gdzie X jest zbiorem niepustym, zaś $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ jest odwzorowanie spełniającym następujące warunki:

(a) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$,

(c) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$(nierówność trójkąta).

Elementy przestrzeni metrycznej nazywamy *punktami*, odwzorowanie ρ *metryką*, a wartość $\rho(x, y)$ *odległością* pomiędzy punktami x i y w metryce ρ.

Przykład. W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ odwzorowanie

$$\rho_1((x_1, \ldots, x_d), (y_1, \ldots, y_d)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$$

jest metryką, zwaną metryką euklidesową. Warunki (a) i (b) są spełnione w sposób oczywisty. Aby udowodnić nierówność trójkąta potrzebne nam jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1. *(nierówność Schwartza) Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d$ zachodzi nierówność*

$$\left(\sum_{k=1}^{d} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2\right).$$

Dowód. Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{d} (a_k t - b_k)^2 \geqslant 0.$$

Zatem trójmian kwadratowy

$$w(t) = \sum_{k=1}^{d} (a_k t - b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2\right) t^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k b_k\right) t + \left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2\right)$$

jest nieujemny, a więc jego wyróżnik $\Delta \leqslant 0$. Ponieważ

$$\Delta = 4 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k b_k\right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2\right),$$

więc z nierówności $\Delta \leqslant 0$ wynika już nierówność Schwartza. □

Wniosek 1.2. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d$ zachodzi nierówność*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{d} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{d} b_k^2}.$$

Dowód. Podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$\sum_{k=1}^{d}(a_k+b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{d} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{d} b_k^2} + \sum_{k=1}^{d} b_k^2$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sum_{k=1}^{d} a_k b_k \leqslant 2\sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{d} b_k^2},$$

a ta nierówność wynika natychmiast z nierówności Schwartza. □

Teraz możemy udowodnić nierówność trójkąta dla metryki ρ_1. Niech $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d)$ oraz $z = (z_1, \ldots, z_d)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Połóżmy wówczas $a_k = y_k - x_k$ i $b_k = z_k - y_k$. Wtedy $a_k + b_k = z_k - x_k$, a zatem

$$\rho(x,z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{d} b_k^2} = \rho_1(x,y) + \rho_2(y,z).$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ można wprowadzić inne metryki, np.

$$\rho_2((x_1,\ldots,x_d),(y_1,\ldots,y_d)) = \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k| \text{ metryka miejska,}$$

$$\rho_3((x_1,\ldots,x_d),(y_1,\ldots,y_d)) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k - y_k|.$$

Ćwiczenie. Sprawdzić, że odwzorowania ρ_2 i ρ_3 są metrykami.

Definicja. Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową na ciałem $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Wówczas *normą* na X nazywamy odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ spełniające następujące warunki:

(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ dla dowolnych $x \in X$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$),

(c) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$(nierówność trójkąta).

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*. Z przestrzenią unormowaną można naturalnie stowarzyszyć metrykę

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Ćwiczenie. Sprawdzić, że ρ jest faktycznie metryką.

Uwaga. Metryki ρ_1, ρ_2 i ρ_3 pochodzą od następujących norm

$$\begin{aligned}
\|(x_1,\ldots,x_d)\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2},\\
\|(x_1,\ldots,x_d)\|_2 &= \sum_{k=1}^{d} |x_k|,\\
\|(x_1,\ldots,x_d)\|_3 &= \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|.
\end{aligned}$$

Pomiędzy tymi normami zachodzą następujące zależności

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d}|x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{d}|x_k| \leqslant d\max_{1\leqslant k\leqslant d}|x_k|,$$

tzn.

$$\|x\|_3 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant d\|x\|_3.$$

Zatem wszystkie trzy normy są równoważne.

Zdefiniujmy iloczyn skalarny wektorów $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^d$ zdefiniowany jako

$$\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle := \sum_{k=1}^{d} a_k b_k, \text{ gdy } \bar{a} = (a_1, \dots, a_d),\ \bar{b} = (b_1, \dots, b_d).$$

Wówczas $\|a\| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a}\rangle}$ oraz nierówność Schwartza jest postaci

$$\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle \leqslant \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a}\rangle}\sqrt{\langle \bar{b}, \bar{b}\rangle} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|.$$

Uwaga. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subset X$ podzbiorem niepustym. Wówczas funkcja ρ obcięta do zbioru $A \times A$ jest metryką na zbiorze A. Metryką ρ na przestrzeni A nazywamy *metryką indukowaną*.

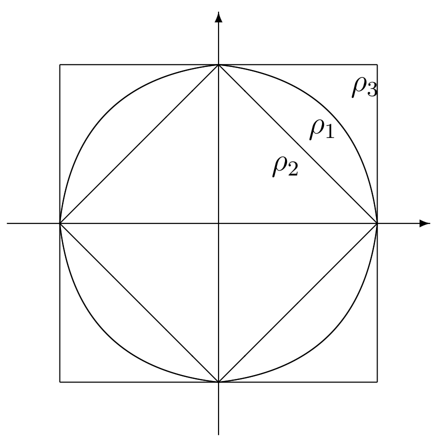
Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Dla dowolnego elementu $x_0 \in X$ oraz $r > 0$ *kulą domkniętą* o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$K(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leqslant r\},$$

a *kulą otwartą* o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Przykład. Na $\mathbb{R}$ wszystkie metryki ρ_1, ρ_2, ρ_3 są sobie równe, a kule są postaci $K(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$ oraz $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$. Dla $\mathbb{R}^2$ kule w odpowiednich metrykach wyglądają następująco:



Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dowolnym ciągiem punktów z X. Mówimy, że punkt $x \in X$ jest *granicą* ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \rho(x_n, x) < \varepsilon,$$

lub równoważnie
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ x_n \in B(x,\varepsilon),$$
lub równoważnie
$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0.$$
Jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę, to mówimy, że jest *zbieżny* do x i oznaczmy to $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Definicja. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że podzbiór $A\subset X$ jest ograniczony, gdy istnieje $x\in X$ oraz $r>0$ taka, że $A\subset K(x,r)$.

Twierdzenie 1.3. *Jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granice i jest ograniczony.*

Dowód. Dowodzimy nie wprost, zakładając, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma dwie różne granice x i y. Przyjmijmy $\varepsilon=\rho(x,y)/2$. Z definicji granicy istnieje n_0 taka, że
$$\rho(x_n,y)<\varepsilon \text{ oraz } \rho(x_n,y) \text{ dla } n\geqslant n_0.$$
Zatem z nierówności trójkąta dla $n\geqslant n_0$ mamy
$$2\varepsilon=\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)<2\varepsilon,$$
co daje sprzeczność.

Pokażemy teraz, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Jeśli $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, to istnieje liczba n_0 taka, że $\rho(x_n,x)<1$ dla $n\geqslant n_0$. Niech
$$r=\max\{1,\rho(x_1,x),\dots,\rho(x_{n_0},x)\}.$$
Wtedy $\rho(x_n,x)\leqslant r$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$. Zatem $x_n\in K(x,r)$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ □

Twierdzenie 1.4. *Rozważmy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^d,\rho_1)$ o elementach $x_n=(x_n^1,\dots,x_n^d)$ oraz punkt $x=(x^1,\dots,x^d)\in\mathbb{R}^d$. Wówczas ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n^k\to x^k$ dla każdego $1\leqslant k\leqslant d$. Inaczej mówiąc, ciąg jest zbieżny w metryce ρ_1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po współrzędnych.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $x_n\to x$, a zatem $\sqrt{\sum_{i=1}^d(x_n^i-x^i)^2}\to 0$. Ponadto, dla dowolnego $1\leqslant k\leqslant d$ mamy
$$0\leqslant|x_n^k-x^k|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^d(x_n^i-x^i)^2}\to 0.$$
Zatem z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $|x_n^k-x^k|\to 0$, a więc $x_n^k\to x^k$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $x_n^k\to x^k$ dla każdego $1\leqslant k\leqslant d$. Zatem $x_n^k-x^k\to 0$, a stąd $(x_n^k-x^k)^2\to 0$ dla każdego $1\leqslant k\leqslant d$. Z twierdzenia o zbieżności dla sumy ciągów otrzymujemy
$$\sum_{i=1}^d(x_n^i-x^i)^2\to 0, \text{ a stąd } \rho_1(x_n,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^d(x_n^i-x^i)^2}\to 0.$$
□

Ćwiczenie. Pokazać, że zbieżność w metryce ρ_2 i ρ_3 jest również równoważna zbieżności po współrzędnych.

Przykład. Ciąg $x_n = \left(1/n, \sqrt{1-1/n}\right)$ jest zbieżny w metryce euklidesowej na $\mathbb{R}^2$ do punktu $(0,1)$.

Definicja. Podzbiór G przestrzeni metrycznej (X,ρ) nazywamy *otwartym*, gdy dla dowolnego punktu $x \in G$ istnieje $r > 0$ taka, że $B(x,r) \subset G$.

Podzbiór F przestrzeni metrycznej (X,ρ) nazywamy *domkniętym*, gdy zbiór $X \setminus F$ jest otwarty.

Twierdzenie 1.5. *Podzbiór F przestrzeni metrycznej (X,ρ) jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu ciągu punktów ze zbioru F jego granica należy do F, tzn.*

$$\forall_{\{x_n\}\subset F} \quad x_n \to x \in X \Longrightarrow x \in F.$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $F \subset X$ jest domknięty. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem punktów z F zbieżnym do punktu $x \in X$. Pokażemy, że $x \in F$. Przypuśćmy, że $x \notin F$, a zatem $x \in X \setminus F$, który jest zbiorem otwartym. Zatem istnieje $r > 0$ taka, że $B(x,r) \subset X \setminus F$. Z definicji granicy ciągu prawie wszystkie elementy ciągu $\{x_n\}$ należą do $X \setminus F$, a więc $x_n \notin F$ dla dostatecznie dużych n, co przeczy założeniu, że wszystkie elementy ciągu $\{x_n\}$ należą do F. Zatem $x \in F$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów ze zbioru F jego granica należy do F. Pokażemy, że zbiór F jest domknięty, tzn. że zbiór $X \setminus F$ jest otwarty. Ustalmy $y \in X \setminus F$. Pokażemy, że $B(y,1/n) \subset X \setminus F$ dla pewnego n. Gdyby kula $B(y,1/n)$ nie zawierała się w $X \setminus F$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to istniałby ciąg $\{y_n\}$ taki, że $y_n \in B(y,1/n) \cap F$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\rho(y_n,y) < 1/n$, więc z definicji granicy ciągu $y_n \to y$. Z założenia $y \in F$, co przeczy założeniu, że $y \in X \setminus F$. Zatem $B(y,1/n) \subset X \setminus F$ dla pewnego n, a więc $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym. □

Twierdzenie 1.6. *Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Część wspólna skończenie wielu zbiorów otwartym jest zbiorem otwartym.*

Część wspólna dowolnie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Dowód. Niech $\{G_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorów otwartych oraz $G = \bigcup_{t\in T} G_t$. Weźmy dowolny punkt $x \in G$, wówczas istnieje $t \in T$ taki, że $x \in G_t$. Ponieważ G_t jest zbiorem otwartym, więc istnieje $r > 0$ taka, że $B(x,r) \subset G_t \subset G$. A zatem G jest zbiorem otwartym.

Niech $G_1,\dots,G_n$ będą zbiorami otwartymi oraz $G = G_1 \cap \ldots \cap G_n$. Jeśli $x \in G$, to $x \in G_i$ dla dowolnego $i = 1,\dots,n$. Ponieważ zbiory G_i są otwarte, więc istnieją liczby $r_i > 0$ takie, że $B(x,r_i) \subset G_i$. Niech $r = \min\{r_i : 1,\dots,n\}$. Wtedy

$$B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset G_i \text{ dla dowolnego } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Stąd $B(x,r) \subset G$, a więc G jest zbiorem otwartym.

Niech $\{F_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych oraz $F = \bigcap_{t\in T} F_t$. Z prawa de Morgana otrzymujemy

$$X \setminus F = \bigcup_{t\in T} (X \setminus F_t),$$

a więc jest to zbiór otwarty z pierwszej części twierdzenia. Z prawa de Morgana wynika również ostatnia część twierdzenia. □

Przykład. Kula $B(x_0,r)$ jest zbiorem otwartym w (X,ρ). Istotnie, niech $x \in B(x_0,r)$. Wtedy $\rho(x,x_0) < r$ i połóżmy $\delta = r - \rho(x,x_0)$. Pokażemy, że $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)$. Jeśli $y \in B(x,\delta)$, to

$$\rho(y,x_0) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,x_0) < \delta + \rho(x,x_0) = r.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że $K(x_0, r)$ jest zbiorem domkniętym.

Przykład. 1. Zbiór $G = \{(x, y) : x > 0\}$ jest podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^2$. Jeśli $(x, y) \in G$, to $r = x > 0$. Pokażemy, że $B((x, y), r) \subset G$. Niech $(x', y') \in B((x, y), r)$. Wtedy

$$x - x' \leqslant |x - x'| \leqslant \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r = x,$$

a stąd $x' > 0$, więc $(x', y') \in G$.

2. Zbiór $F = \{(x, y) : x \leqslant 0\}$ jest podzbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^2$. Niech $\{(x_n, y_n)\}$ będzie ciągiem elementów z F, który jest zbieżny do punktu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy $x_n \leqslant 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to x$. Wówczas wiemy, że $x \leqslant 0$, a więc $(x, y) \in F$.

Definicja. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, ρ). Punkt $x \in A$ nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru A, gdy istnieje $r > 0$ taka, że $B(x, r) \subset A$. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem brzegowym* zbioru A, gdy dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ oraz } B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Zbiór punktów wewnętrznych zbioru A nazywamy *wnętrzem zbioru* A i oznaczamy przez $\mathrm{Int}A$. Zbiór punktów brzegowych zbioru A nazywamy *brzegiem zbioru* A i oznaczamy przez ∂A. Sumę wnętrza i brzegu zbioru A nazywamy *domknięciem* A i oznaczmy przez $\overline{A}$.

Twierdzenie 1.7. *(ćwiczenie) Wnętrze zbioru A jest jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a domknięcie zbioru A jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.*

Przykład. 1. $\partial\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} = \partial\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

2. $\mathrm{Int}\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ oraz $\mathrm{Int}\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \emptyset$.

Twierdzenie 1.8.

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists_{\{x_n\}, x_n \in A}\, x = \lim_{n\to\infty} x_n\}.$$

Dowód. ($\supset$) Załóżmy, że dla pewnego $x \in X$ istnieje ciąg $\{x_n\}$ w A taki, że $x_n \to x$. Jeśli $x \in IntA$, to oczywiście $x \in \overline{A}$. Przypuśćmy zatem, że $x \notin IntA$. Wtedy dla dowolnego $r > 0$ mamy $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Ponadto $x_n \in B(x, r) \cap A$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a więc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Stąd $x \in \partial A \subset IntA$.

($\subset$) Załóżmy, że $x \in \overline{A}$. Jeśli $x \in IntA$, to wystarczy wziąć $x_n = x$. Jeśli $x \in \partial A$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Ponieważ $\rho(x_n, x) < 1/n$, więc $x_n \to x$ oraz $x_n \in A$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. □

Definicja. Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy *zwartym*, gdy dowolny ciąg punktów ze zbioru A posiada podciąg zbieżny do punktu z A.

Twierdzenie 1.9. *Każdy zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony. Domknięty podzbiór zbioru zwartego też jest zwarty.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem zwartym w (X, ρ) oraz niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym punktów z A. Niech $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Ponieważ A jest zbieżny, więc istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$, który jest zbieżny do pewnego $y \in A$. Z drugiej strony pociąg ten zbiega również do x. Stąd $x = y \in A$, a więc A jest zbiorem domkniętym.

Przypuśćmy, że A nie jest zbiorem ograniczonym. Wówczas dla dowolnego $x \in X$ oraz $r > 0$ istnieje $y_{x,r} \in A$ taki, że $\rho(x, y_{x,r}) \geqslant r$. Ustalmy punkt $x_0 \in A$, a następnie dla dowolnego n naturalnego niech x_n będzie elementem A takim, że $\rho(x_n, x_0) \geqslant n$. Ze zwartości zbioru A istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$, który jest zbieżny, a więc ograniczony. Zatem istnieje $y \in X$ oraz $r > 0$ takie, że $\rho(y, x_{k_n}) \leqslant r$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\rho(x_0, y) + r \geqslant \rho(x_0, y) + \rho(y, x_{k_n}) \geqslant \rho(x_0, x_{k_n}) \geqslant k_n$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co przeczy temu, że ciąg $\{k_n\}$ jest nieograniczony. Zatem A jest ograniczony.

Dowód ostatniej części twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Twierdzenie 1.10. *Podzbiór przestrzeni $(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Patrz poprzednie twierdzenie.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Niech $y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}^d$ oraz $r > 0$ będą takie, że $A \subset K(y, r)$. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem w A o wyrazach postaci $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$. Wówczas dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant d$ mamy

$$|x_n^k - y^k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_n^i - y^i)^2} = \rho_1(x_n, y) \leqslant r,$$

a więc ciąg $\{x_n^k\}$ jest ograniczony. Korzystając z tw. Bolzano-Weierstrassa wybieramy z ciągu ograniczonego $\{x_n^1\}$ podciąg $\{x_{k_n^1}^1\}$ zbieżny do $x^1 \in \mathbb{R}$. Następnie z ciągu ograniczonego $\{x_{k_n^1}^2\}$ wybieramy podciąg $\{x_{k_n^2}^2\}$ zbieżny do $x^2 \in \mathbb{R}$ itd. Mając skonstruowamy już ciąg zbieżny $\{x_{k_n^i}^i\}$ z ciągu ograniczonego $\{x_{k_n^i}^{i+1}\}$ wybieramy podciąg $\{x_{k_n^{i+1}}^{i+1}\}$ zbieżny do $x^{i+1} \in \mathbb{R}$, aż skonstuujemy podciąg $\{x_{k_n^d}^d\}$. Ponieważ ciąg $\{k_n^d\}$ jest podciągiem ciągu $\{k_n^i\}$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, d$, więc $x_{k_n^d}^i \to x^i$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, d$. Zatem $x_{k_n^d} \to x = (x^1, \ldots, x^d)$. Ponieważ zbiór A jest domknięty, więc $x \in A$, co kończy dowód zwartości zbioru A. □

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, \forall_{n,m \geqslant n_0} \, \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.11. *Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to x$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ). Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 taka, że $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$. Jeśli weźmiemy dowolne dwie liczby $m, n \geqslant n_0$, to

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

a więc $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego. □

Definicja. Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy zupełną, jeśli każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Przykład. 1. $\mathbb{R}$ z metryką $|\cdot - \cdot|$ jest przestrzenią zupełną.

2. $\mathbb{Q}$ z metryką $|\cdot - \cdot|$ nie jest przestrzenią zupełną. Wystarczy znaleźć ciąg $\{x_n\}$ liczb wymiernych, który zbiega do $\sqrt{2}$. Ciąg ten jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathbb{Q}, |\cdot - \cdot|)$ natomiast nie jest w tej przestrzeni zbieżny, bo gdyby był zbieżny, to oznaczałoby, że ma granicę wymierną w zwykłym sensie, a wiemy, że $\sqrt{2}$ jest jego granicą.

Twierdzenie 1.12. *Każda przestrzeń zwarta jest zupełna.*

Dowód. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią zwartą oraz niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Ze zwartości istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$ zbieżny do $x \in X$. Pokażemy, że $x_n \to x$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją liczby $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0 \quad \text{oraz}$$

$$\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1.$$

Niech $N \geqslant n_1$ będzie liczbą naturalną taką, że $k_N \geqslant n_0$. Wówczas dla dowolnego $n \geqslant n_0$ mamy

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{k_N}) + \rho(x_{k_N}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a więc $x_n \to x$ w metryce ρ. □

Twierdzenie 1.13. *Przestrzeń metryczna $(\mathbb{R}^d, \rho_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ jest zupełna.*

Dowód. Ustalmy $1 \leqslant i \leqslant 3$. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w $(\mathbb{R}^d, \rho_i)$ postaci $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$. Wtedy dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant d$ ciąg $\{x_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego ponieważ

$$|x_m^k - x_n^k| \leqslant \rho_i(x_m, x_n) \text{ dla dowolnych } m, n \in \mathbb{N}.$$

Z twierdzenie Cauchy'ego dowolnego $1 \leqslant k \leqslant d$ ciąg $\{x_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnego $x^k \in \mathbb{R}$. Niech $x = (x^1, \ldots, x^d)$. Wówczas $x_n \to x$ po współrzędnych, a więc $x_n \to x$ w metryce ρ_i. □

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy odwzorowaniem *Lipschitza ze stałą Lipschitza* L, gdy

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant L\rho(x, y) \text{ dla dowolnych } x, y \in X.$$

Jeśli $L < 1$, to T nazywamy odwzorowaniem *zwężającym*. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania T, gdy $Tx = x$.

Twierdzenie 1.14. *(Zasada Banacha) Niech (X, ρ) będzie przestrzenią zupełną oraz $T : X \to X$ odwzorowaniem zwężającym. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt stały x odwzorowania T oraz dla dowolnego punktu $y \in X$ mamy $T^n y \to x$.*

Dowód. Niech x_0 będzie dowolnym punktem z X oraz niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie $x_{n+1} = T(x_n)$. Wtedy $x_n = T^n(x_0)$ oraz

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leqslant L\rho(x_n, x_{n-1})$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; przypomnimy, że $L < 1$. Stosując indukcję matematyczną możemy pokazać, że

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant L^n \rho(x_1, x_0).$$

Stąd dla dowolnych $n < m$ mamy

$$\begin{aligned}
&\rho(x_n, x_m) \leqslant \\
&\quad\leqslant \ \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant \\
&\quad\leqslant \ (L^n + L^{n+1} + \ldots + L^{m-2} + L^{m-1})\rho(x_1, x_0) = \\
&\quad= \ L^n \frac{1 - L^{m-n}}{1 - L}\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{L^n}{1 - L}\rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Ponieważ $L^n \to 0$, więc $L^n \rho(x_1, x_0)/(1 - L) \to O$, a zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 taka, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{L^n}{1 - L}\rho(x_1, x_0) < \varepsilon.$$

Zatem $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego i zupełności (X, ρ) zbieżny do pewnego $x \in X$. Pokażemy, że x jest punktem stałym dla T. Otóż

$$0 \leqslant \rho(x, Tx) \leqslant \rho(x, x_{n+1}) + \rho(Tx_n, Tx) \leqslant \rho(x, x_{n+1}) + L\rho(x_n, x).$$

Ponieważ $\rho(x_n, x) \to 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\rho(x, Tx) = 0$, a zatem $Tx = x$.

Niech y będzie dowolnym punktem w X Ponieważ $T^n x = x$, więc

$$\rho(T^n y, x) = \rho(T^n y, T^n x) \leqslant L^n \rho(y, x) \to 0,$$

a zatem $T^n y \to x$.

Niech $x' \in X$ będzie pewnym punktem stałym dla T. Wówczas

$$x' = T^n x' \to x,$$

a więc $x' = x$, czyli x jest jedynym punktem stałym dla T. □

Uwaga. Ponieważ

$$\rho(x_n, x) - \rho(x, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{L^n}{1 - L}\rho(x_1, x_0),$$

więc przechodząc z m do nieskończoności otrzymujemy

$$\rho(x_n, x) \leqslant \frac{L^n}{1 - L}\rho(x_1, x_0). \tag{1}$$

Przykład. Korzystając z zasady Banacha pokażemy, że układ równań

$$\begin{aligned}
2x - y - \sin x &= 4 \\
-x + 3y - \cos y &= 5
\end{aligned}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie i wskażemy w jaki sposób znajdować numerycznie to rozwiązanie. Najpierw zauważmy, że równanie możemy zapisać równoważnie

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin x + 2 \\
y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos y + \frac{5}{3},
\end{aligned}$$

zatem rozwiązanie jest punktem stałym odwzorowania $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci

$$T(x,y) = (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin x + 2, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos y + \frac{5}{3}).$$

Pokażmy, że T jest odwzorowaniem zwężającym w metryce ρ_2. Istotnie

$$\begin{aligned} &\rho_2(T(x,y),T(x',y')) = \\ = \;& |\frac{1}{2}(y-y') + \frac{1}{2}(\sin x - \sin x')| + |\frac{1}{3}(x-x') + \frac{1}{3}(\cos y - \cos y')| \leqslant \\ \leqslant \;& \frac{1}{2}|y-y'| + \frac{1}{2}|\sin x - \sin x'| + \frac{1}{3}|x-x'| + \frac{1}{3}|\cos y - \cos y'| \leqslant \\ \leqslant \;& \frac{5}{6}(|x-x'| + |y-y'|) = \frac{5}{6}\rho_2((x,y),(x',y')). \end{aligned}$$

Zatem T jest odwzorowaniem zwężającym ze stałą Lipschitza $L = 5/6$. Ponieważ $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ jest przestrzenią zupełną, więc nasze równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie (x,y). Aby przybliżyć numerycznie to rozwiązanie wybieramy dowolny punkt na płaszczyźnie (x_0,y_0) i rekurencyjnie wyznaczamy ciąg $\{(x_n,y_n)\}$ kolejnych przybliżeń numerycznych rozwiązania w następujący sposób $(x_{n+1},y_{n+1}) = T(x_n,y_n)$. Z zasady Banacha wiemy, że $(x_n,y_n) \to (x,y)$, ponadto jesteśmy w stanie kontrolować dokładność z jaką rozwiązanie numeryczne (x_n,y_n) przybliża rozwiązanie rzeczywiste (x,y), daje nam to nierówność (1). Otóż

$$|x_n - x| + |y_n - y| \leqslant 6\left(\frac{5}{6}\right)^n \rho_2((x_1,y_1),(x_0,y_0)),$$

więc aby otrzymać rozwiązanie z dokładnością $\eta > 0$ wystarczy wyznaczyć punkt (x_n,y_n), gdzie n jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność

$$6\left(\frac{5}{6}\right)^n \rho_2((x_1,y_1),(x_0,y_0)) < \eta.$$

1.1 Granica funkcji i funkcje ciągłe

Definicja. Niech (X,ρ_1), (Y,ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Punkt $x_0 \in X$ jest *punktem skupienia* zbioru $A \subset X$, gdy istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$ taki, że

$$x_n \in A, x_n \neq x_0 \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{2}$$

Niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru A. Mówimy, że funkcja $f : A \to Y$ ma granicę $y_0 \in Y$ w punkcie x_0, gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego (2) zachodzi warunek

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Wówczas piszemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Przykład. 1. Rozważmy funkcję

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Wówczas punkt $(0,0)$ nie należy do dziedziny f, ale jest jej punktem skupienia. Ponadto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Aby to udowodnić weźmy dowolny ciąg $\{(x_n, y_n)\}$ punktów dziedziny, który zbiega do $(0,0)$. Wtedy $x_n \to 0$ oraz $y_n \to 0$. Musimy pokazać, że $f(x_n, y_n) \to 0$. Najpierw zauważmy, że

$$0 \leqslant |f(x_n, y_n)| = |x_n + y_n| |\sin \frac{1}{x_n}| |\sin \frac{1}{y_n}| \leqslant |x_n + y_n|.$$

Ponieważ $x_n + y_n \to 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $f(x_n, y_n) \to 0$.

2. Rozważmy funkcję

$$g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Wówczas punkt $(0,0)$ nie należy do dziedziny f, ale jest jej punktem skupienia. Jednak g nie posiada granicy w $(0,0)$. Rozważmy dwa ciągi $\{(x_n, y_n)\}$, $\{(x'_n, y'_n)\}$ punktów dziedziny

$$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \quad (x'_n, y'_n) = (0, \frac{1}{n}).$$

Oba zbiegają do $(0,0)$, jednak

$$g(x_n, y_n) = \frac{2\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 \to 1, \quad g(x'_n, y'_n) = \frac{2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{n}}{0^2 + \frac{1}{n^2}} = 0 \to 0.$$

Zatem g nie posiada granicy w $(0,0)$, gdyby miała granicę obie powyższe granice byłyby sobie równe.

Uwaga. Załóżmy, że $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^2$ oraz (x_0, y_0) jest punktem skupienia zbioru A. Może się zdarzyć, że istnieją tzw. granice iterowane

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x,y)) \text{ oraz } \lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x,y))$$

natomiast f nie posiada granicy w (x_0, y_0). Taką nieprzyjemną własność posiada funkcja g z drugiego przykładu. Istotnie dla $x \neq 0$ mamy

$$\lim_{y \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0,$$

a więc

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} g(x,y)) = \lim_{x \to 0} 0 = 0.$$

Podobnie

$$\lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} g(x,y)) = 0,$$

a wiemy, że nie ma ona granicy w $(0,0)$.

Ponadto istnienie granicy w punkcie nie zapewnia istnienia granic iterowanych, co można zobaczyć dla funkcji f z przykładu 1.

Twierdzenie 1.15. *Niech (X, ρ_1), (Y, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru $A \subset X$. Funkcja $f : A \to Y$ ma granicę $y_0 \in Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A, x \neq x_0} (\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), y_0) < \varepsilon),$$

tzn. równoważnie

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A, x \neq x_0} (x \in B_{\rho_1}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_{\rho_2}(y_0, \varepsilon)).$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia z zeszłorocznego wykładu, które mówiło, że definicje Heine'go i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie są równoważne i zostawimy go jako ćwiczenie. □

Definicja. Niech (X, ρ_1), (Y, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi oraz $f : A \to Y$, gdzie $A \subset X$. Mówimy, że funkcja $f : A \to Y$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ punktów z A mamy

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),$$

lub równoważnie

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in A}\, (x \in B_{\rho_1}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_{\rho_2}(f(x_0), \varepsilon))\,.$$

Mówimy, że funkcja $f : A \to Y$ jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Uwaga. Jeśli dodatkowo $x_0 \in A$ jest punktem skupienia zbioru A, to ciągłość w x_0 jest równoważna $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Jeśli $x_0 \in A$ nie jest punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że jest on *punktem izolowanym*, a wtedy f jest zawsze ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie 1.16. *Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$, gdzie (X, ρ) jest przestrzenią metryczną. Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ oraz $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, to*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha a + \beta b \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\
\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) &= a \cdot b \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a}{b}, \text{ gdy } b \neq 0.
\end{aligned}$$

W szczególności, jeśli f i g są ciągłe w x_0, to $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ oraz f/g są ciągłe w x_0.

Dowód. Zostawiamy jako ćwiczenie. □

Twierdzenie 1.17. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi oraz $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Jeśli f jest ciągła w $x_0 \in X$ oraz g ciągła w $f(x_0)$, to $g \circ f$ jest ciągła w x_0. W szczególności, f i g są funkcjami ciągłymi, to $g \circ f$ jest ciągła.*

Dowód. Zostawiamy jako ćwiczenie. □

Przykład.

1. Rzut na i–tą współrzędną $p_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dany wzorem

   $$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_d) = x_i$$

   jest funkcją ciągła dla $i = 1, \ldots, d$. Istotnie, jeśli

   $$(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d) \to (x^1, x^2, \ldots, x^d),$$

   to wówczas

   $$p_i(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d) = x_n^i \to x^i = p_i(x^1, x^2, \ldots, x^d).$$

2. Funkcje wielomianowe wielu zmiennych

   $$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_d} a_{i_1, i_2, \ldots, i_d} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_d^{i_d},$$

   są funkcjami ciągłymi, np. $(x, y) \mapsto x^3 y + 12xy + 4xy^8$.

3. Funkcje wymierne wielu zmienny, które są ilorazami funkcji wielomianowych są funkcjami ciągłymi, np. $(x,y) \mapsto \frac{x^3y+12xy+4xy^8}{x^3-10xy}$.

4. Ponadto wszelkie złożenia ich ze znanymi funkcjami ciągłymi jednej zmiennej są ciągłe, np. $(x,y) \mapsto \sin\frac{\ln x^3+4e^{y^8}}{\operatorname{arctg}(10xy)}$.

Twierdzenie 1.18. *Rozważmy funkcję $f : X \to \mathbb{R}^d$, gdzie (X,ρ) jest przestrzenią metryczną. Wtedy $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_d(x))$, gdzie $f_i : X \to \mathbb{R}$ dla $i = 1,\ldots,d$. Funkcja f jest ciągła w $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f_i dla $i = 1,\ldots,d$ są ciągłe w x_0.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Jeśli f jest ciągła w x_0, to również $f_i = p_i \circ f$ jest ciągła w x_0, ponieważ rzut p_i jest ciągły.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że funkcje $f_i : X \to \mathbb{R}^d$ dla $i = 1,\ldots,d$ są ciągłe w x_0. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem elementów z X zbieżnym do x_0. Wówczas z ciągłości funkcji f_i mamy $f_i(x_n) \to f_i(x_0)$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant d$. Stąd

$$f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \ldots, f_d(x_n)) \to (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_d(x_0)) = f(x_0).$$

□

Przykład. 1. Funkcja
$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \mathbb{R}^2$$
jest funkcją ciągłą.

2. Dowolna funkcja liniowa $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i)$$
jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 1.19. *Funkcja $f : (X,\rho_1) \to (Y,\rho_2)$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech U będzie zbiorem otwartym w (Y,ρ_2) oraz $x_0 \in f^{-1}(U)$. Wtedy $f(x_0) \in U$, a ponieważ U jest otwarty, więc istnieje $\varepsilon > 0$ taka, że $B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon) \subset U$. Z ciągłości f istnieje $\delta > 0$ taka, że $x \in B_{\rho_1}(x_0,\delta)$ implikuje $f(x) \in B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon)$, a zatem

$$f(B_{\rho_1}(x_0,\delta)) \subset B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon) \subset U,$$

a stąd $B_{\rho_1}(x_0,\delta) \subset f^{-1}(U)$. Zatem $f^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym.

($\Leftarrow$) Ustalmy $x_0 \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Ponieważ kula $B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon)$ jest zbiorem otwartym, więc z założenia $f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon))$ jest zbiorem otwartym. Wiemy, że $x \in f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon))$, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$B_{\rho_1}(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon)).$$

Wtedy
$$x \in f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon)) \Rightarrow f(x) \in B_{\rho_2}(f(x_0),\varepsilon)),$$
a zatem f jest ciągła w x_0. □

Wniosek 1.20. *(ćwiczenie) Funkcja $f : (X, \rho_1) \to (Y, \rho_2)$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego jest domknięty.*

Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ przyjmuje w punkcie $x_M \in X$ wartość największą, gdy $f(x) \leqslant f(x_M)$ dla wszystkich $x \in X$, natomiast przyjmuje w punkcie $x_m \in X$ wartość najmniejszą, gdy $f(x) \geqslant f(x_m)$ dla wszystkich $x \in X$.

Twierdzenie 1.21 (Weierstrassa)**.** *Niech A będzie pozbiorem zwartym przestrzeni metrycznej X. Wówczas dowolna funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ jest ograniczona oraz istnieją punkty w zbiorze A, dla których f przyjmuje wartość największą i najmniejszą.*

Dowód. jest analogiczny do dowodu w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}$, a A jest odcinkiem domkniętym. □

Definicja. Niech (X, ρ_1) oraz (Y, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja jest *jednostajnie ciągła*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in X}\ (\rho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Uwaga. Jeśli $f : X \to Y$ spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 1.22 (Cantora)**.** *Niech (X, ρ_1) oraz (Y, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi, przy czym (X, ρ_1)jest przestrzenią zwartą. Wówczas dowolna funkcja ciągła $f : X \to Y$ jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. jest analogiczny do dowodu w przypadku, gdy X jest odcinkiem domkniętym. □

Definicja. Niech (X, ρ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że podzbiór $A \subset X$ jest *spójny*, gdy nie istnieją dwa niepuste rozłączne zbiory otwarte U i V takie, że $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ oraz $A \subset U \cup V$.

Uwaga. Intuicyjnie spójność oznacza, że zbiór nie składa sie z odseparowanych od siebie kawałków. Jedynymi spójnymi podzbiorami $\mathbb{R}$ są przedziały (mogą być nieskończone).

Twierdzenie 1.23. *Niech (X, ρ_1) oraz (Y, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ funkcją ciągłą. Wówczas obraz $f(A)$ dowolnego podzbioru spójnego $A \subset X$ jest zbiorem spójnym w Y.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(A)$ nie jest zbiorem spójnym. Wtedy istnieją dwa niepuste rozłączne zbiory otwarte U i V takie, że $U \cap f(A) \neq \emptyset$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ oraz $f(A) \subset U \cup V$. Ponieważ funkcja f jest ciągła więc zbiory $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset X$ są otwarte i niepuste. Ponadto

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Jeśli $y \in U \cap f(A)$, to istnieje $x \in A$ taki, że $y = f(x) \in U$, zatem $x \in A \cap f^{-1}(U)$, a więc $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Podobnie $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Stąd wynika, że A nie jest zbiorem spójnym, co kończy dowód. □

Definicja. Niech (X, ρ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że podzbiór $A \subset X$ jest *łukowo spójny*, gdy dowolne dwa punkty $x, y \in A$ można połączyć łukiem w zbiorze A, tzn. istnieje funkcja ciągła $\gamma : [0, 1] \to A$ taka, że $\gamma(0) = x$ oraz $\gamma(1) = y$.

Twierdzenie 1.24. *Dowolny zbiór łukowo spójny $A \subset X$ jest spójny.*

Dowód. Przypuśćmy, że $A \subset X$ jest łukowo spójny, ale nie spójny. Wówczas dwa niepuste rozłączne zbiory otwarte U i V takie, że $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ oraz $A \subset U \cup V$. Niech $x \in U \cap A$, $y \in V \cap A$ oraz $\gamma : [0,1] \to A$ łukiem łączącym te punkty. Wtedy $\gamma([0,1])$ nie jest zbiorem spójnym ponieważ zbiory otwarte U i V rozdzielają ten zbiór. Z drugiej strony $\gamma([0,1])$ jest spójny, jako ciągły obraz zbioru spójnego. □

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Przez $C(X)$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji ciągłych i ograniczonych $f : X \to \mathbb{R}$. $C(X)$ jest przestrzenią metryczną z metryką jednostajną

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

(sprawdzić, że d jest metryką).

Uwaga. Zauważmy, że zbieżność w metryce jednostajnej jest równoważna zbieżności jednostajnej w zwykłym sensie. Przypomnijmy, że ciąg funkcyjny $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_\varepsilon \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, \forall_{x \in X} \, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_\varepsilon \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, \forall_{x \in X} \, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_\varepsilon \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, d(f_n, f) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

co jest równoważne $d(f_n, f) \to 0$.

Twierdzenie 1.25. *Przestrzeń metryczna $(C(X), d)$ jest przestrzenią zupełną.*

2 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

Definicja. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym oraz niech $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy *pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_k w punkcie $\bar{x}$* i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$, $f_{x_k}(\bar{x})$ lub $D_k f(\bar{x})$.

Uwaga. Pochodna funkcji f względem x_k jest w rzeczywistości zwykłą pochodną funkcji f przy ustalonych zmiennych $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, tzn. rozważamy funkcję

$$\tilde{f}(t) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

oraz obliczamy zwykłą pochodną $\tilde{f}'(x_k)$. Funkcja $\tilde{f}$ jest obcięciem funkcji f w dziedzinie do prostej przechodzącej przez punkt x i równoległej do osi Ox_k, zatem pochodna cząstkowa jest współczynnikiem nachylenia funkcji f w punkcie $\bar{x}$ w kierunku tej prostej.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2 - e^x y$. Różniczkując f względem x przy ustalonym y, otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - e^x y,$$

zaś różniczkując f względem y przy ustalonym x, otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 y - e^x.$$

Uwaga. Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ we wszystkich punktach $\bar{x} \in U$, to odwzorowanie

$$U \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \in R$$

nazywamy pochodną cząstkową funkcji f względem x_k.

Niech $f : U \to \mathbb{R}^m$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym oraz niech $\bar{x}_0 \in U$. Niech $f_i : U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnymi funkcji f, tzn. $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ dla wszystkich $\bar{x} \in U$. Wówczas pochodną cząstkową funkcji f w punkcie $\bar{x}_0$ względem x_k nazywamy wektor

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{x}_0)\right),$$

o ile istnieje.

Przykład. Niech $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2, 2xy + 2yz - xz)$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2x, 2y - z), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (-2y, 2x + 2z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (-2z, 2y - x).$$

Następnie zdefiniujemy pojęcie pochodnej $f : U \to \mathbb{R}^m$ w punkcie $\bar{x}_0 \in U$ jako odwzorowanie linowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto f(\bar{x}_0) + A(\bar{x} - \bar{x}_0) \in \mathbb{R}^m$$

dobrze przybliża f w okolicach punktu x_0. Przy czym przez dobre przybliżenie będziemy rozumieć takie, że

$$\|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - A(\bar{x} - \bar{x}_0)\| = o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$$

dla $\bar{x} \in U$ z otoczenia punktu $\bar{x}_0$, co równoważnie możemy zapisać jako

$$\|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - A(\bar{h})\| = o(\|\bar{h}\|)$$

dla $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$ bliskich $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definicja. Niech $f : U \to \mathbb{R}^m$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym oraz niech $\bar{x}_0 \in U$. Mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie $\bar{x}_0$, gdy istnieje odwzorowanie linowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - A(\bar{h})\|}{\|\bar{h}\|} = 0.$$

Odwzorowanie linowe A nazywamy *pochodną Frécheta* (pochodną mocną) funkcji f w punkcie $\bar{x}_0$ i oznaczamy $f'(\bar{x}_0)$. Mówimy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny.

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ ma pochodną A w punkcie $\bar{x}_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje składowe $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ mają pochodne $A_1, \ldots, A_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wtedy

$$A\bar{h} = (A_1\bar{h}, \ldots, A_m\bar{h}).$$

Uwaga. Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $\bar{x}_0 \in U$, to f jest ciągła w $\bar{x}_0$. Istotnie

$$\|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0)\| \leqslant \frac{\|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - A(\bar{h})\|}{\|\bar{h}\|}\|\bar{h}\| + \|A\bar{h}\|$$

Funkcja A jako liniowa jest ciągła, więc $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} A\bar{h} = A\bar{0} = \bar{0}$. Zatem wraz z różniczkowalnością daje to

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0)\| = 0,$$

co daje ciągłość f w $\bar{x}_0$.

Twierdzenie 2.1. *Załóżmy, że $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest pochodną funkcji $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie $\bar{x}_0 \in U$. Wówczas f ma wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}_0)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ oraz*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

tzn.

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}_0)h_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\bar{x}_0)h_j \right).$$

Dowód. Ustalmy $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Wówczas funkcja składowa f_i jest różniczkowalna w $\bar{x}_0$ oraz

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f_i(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f_i(\bar{x}_0) - A_i(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0.$$

Wówczas

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(\bar{x}_0 + he_j) - f_i(\bar{x}_0) - A_i(he_j)}{\|he_j\|} = 0,$$

gdzie $e_j = (0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$ jest j-tym standardowym wektorem bazowym. Zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(\bar{x}_0 + he_j) - f_i(\bar{x}_0) - A_{ij}h}{h} = 0,$$

a więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(\bar{x}_0 + he_j) - f_i(\bar{x}_0)}{h} = A_{ij}.$$

Stąd $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}_0)$ istnieje i jest równa A_{ij}. □

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ w pewnym otoczeniu punktu $\bar{x}_0 \in U$ oraz są one ciągłe w punkcie $\bar{x}_0$. Wówczas f posiada pochodną A w punkcie $\bar{x}_0$ oraz zachodzi (3).*

Dowód. Na podstawie jednej z uwag wystarczy rozważać przypadek, gdy $m = 1$. Ustalmy $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ bliskie zera. Ustalmy $1 \leqslant j \leqslant n$ oraz rozważmy funkcję

$$x \mapsto f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_{j-1}^0 + h_{j-1}, x, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Z założenia ta funkcja jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_j^0, a więc z twierdzenia Lagrange'a istnieje $0 < \theta_j < 1$ taka, że

$$f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_j^0 + h_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_{j-1}^0 + h_{j-1}, x_j^0, \ldots, x_n^0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \theta_j h_j e_j) h_j.$$

Sumując teraz powyższe równości dla $j = 1, \ldots, n$ otrzymujemy

$$f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \theta_j h_j e_j) h_j.$$

Ponieważ pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ dla $j = 1, \ldots, n$ są ciągłe w $\bar{x}_0$, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|\bar{h}\| < \delta \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \bar{h}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0)| < \varepsilon/\sqrt{n}$$

dla $j = 1, \ldots, n$. Zatem jeśli $\|\bar{h}\| < \delta$, to

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) h_j| &= |\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \theta_j h_j e_j) h_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) h_j| \\ \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \theta_j h_j e_j) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0)||h_j| &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (|h_j| \cdot 1)) \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \|\bar{h}\| \|(1, \ldots, 1)\| = \varepsilon \|\bar{h}\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{|f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) h_j|}{\|\bar{h}\|} = 0,$$

co kończy dowód. □

Przykład. 1. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dana wzorem

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4, 2x^3 + 3yz^2)$$

ma wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe, więc jest różniczkowalna oraz pochodna $f'(x, y, z)$ jest odwzorowaniem liniowym o macierzy

$$f'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 & 4z^3 \\ 6x^2 & 3z^2 & 6yz \end{bmatrix}.$$

2. Podobnie funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dana wzorem

$$f(x, y) = (xy^2, x - xy, x^2 + 2y^2)$$

jest różniczkowalna oraz

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 - y & -x \\ 2x & 4y \end{bmatrix}.$$

Oznaczenia. Pochodna funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w $\bar{x}_0$ jest wyznaczona przez wektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \right),$$

który będziemy czasem nazywać *gradientem* funkcji w punkcie $\bar{x}_0$ oraz oznaczać $\operatorname{grad}_{\bar{x}_0} f$. Wówczas pochodna Frécheta $f'(\bar{x}_0)$ jest wyznaczona przez

$$f'(\bar{x}_0)\bar{h} = \langle \operatorname{grad}_{\bar{x}_0} f, \bar{h} \rangle,$$

gdzie nawiasy oznaczą zwykły iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$, tzn.

$$\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $\bar{x}_0 \in U$ oraz $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem niezerowym. *Pochodną kierunkową* funkcji $f : U \to \mathbb{R}^m$ w punkcie $\bar{x}_0$ w kierunku wektora $\bar{v}$ nazywamy granicę

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t},$$

o ile ta granica istnieje. Pochodną tę oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}_0)$ lub $D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0)$.

Uwaga. Gdy $\bar{v} = e_j$, to pochodna kierunkowa jest zwykłą pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0)$ dla $j = 1, \ldots, n$.

Uwaga. Pochodną kierunkową funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ względem $\bar{v}$ jest w rzeczywistości zwykłą pochodną funkcji

$$t \mapsto f(\bar{x}_0 + t\bar{v})$$

w punkcie 0. Funkcja ta jest obcięciem funkcji f w dziedzinie do prostej przechodzącej przez punkt $\bar{x}_0$, której kierunek jest wyznaczony przez wektor $\bar{v}$. Zatem pochodna kierunkowa $D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0)$ jest współczynnikiem nachylenia (wzrostu) funkcji f w punkcie $\bar{x}$ w kierunku wektora $\bar{v}$.

Twierdzenie 2.3. *Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ma pochodną w punkcie $\bar{x}_0 \in U$, to dla dowolnego wektora jednostkowego $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ istnieje pochodna kierunkowa w jego kierunku oraz*

$$D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0) = f'(\bar{x}_0)\bar{v} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) v_i.$$

Dowód. Ponieważ

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - f'(\bar{x}_0)(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0,$$

więc biorąc $\bar{h} = t\bar{v}$ otrzymujemy

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0) - f'(\bar{x}_0)(t\bar{v})}{\|t\bar{v}\|} = 0.$$

Ponieważ $f'(\bar{x}_0)(t\bar{v}) = t f'(\bar{x}_0)(\bar{v})$ oraz $\|t\bar{v}\| = |t|\|\bar{v}\|$, więc

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} - f'(\bar{x}_0)(\bar{v}) = 0,$$

a zatem

$$D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} = f'(\bar{x}_0)(\bar{v}).$$

□

Uwaga. Istnienie pochodnych kierunkowych we wszystkich kierunkach nie implikuje różniczkowalności. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ta funkcja ma pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$ we wszystkich kierunkach. Ustalmy wektor jednostkowy $\bar{v} = (a,b)$. Wtedy

$$D_{\bar{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(ta)^3}{(ta)^2+(tb)^2}}{t} = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

Jednak nie jest ona różniczkowalna w $(0,0)$, gdyby tak było, to

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = D_{\bar{v}} f(0,0) = f'(0,0)\bar{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)b = a$$

dla dowolnego wektora jednostkowe (a,b), i sprzeczność.

Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną, to na mocy poprzedniego twierdzenia pochodną kierunkową można wyrazić poprzez gradient funkcji następująco

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \langle \operatorname{grad}_{\bar{x}} f, \bar{v} \rangle.$$

Przypomnijmy, że z nierówności Schwartza dla dowolnych wektorów $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \leqslant \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|$. Dlatego jeśli $\|\bar{v}\| = 1$, to

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \langle \operatorname{grad}_{\bar{x}} f, \bar{v} \rangle \leqslant \|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f\|\|\bar{v}\| = \|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f\|.$$

Ponadto jeśli $\bar{v} = \operatorname{grad}_{\bar{x}} f / \|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f\|$, to

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \langle \operatorname{grad}_{\bar{x}} f, \bar{v} \rangle = \frac{\langle \operatorname{grad}_{\bar{x}} f, \operatorname{grad}_{\bar{x}} f \rangle}{\|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f\|} = \|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f\|.$$

Wniosek 2.4. *Pochodna kierunkowa jest największa w kierunku wektora gradientu. Inaczej mówiąc, funkcja f w punkcie $\bar{x}$ rośnie najszybciej w kierunku wektora* $\operatorname{grad}_{\bar{x}} f$.

Przykład. Obliczmy pochodna funkcji $f(x,y) = x^2 - x^2y + 3xy^2 + 1$ w punkcie $P = (3,1)$ w kierunku wektora $\overrightarrow{PQ}$, gdzie $Q = (6,5)$. Wówczas $\overrightarrow{PQ} = (3,4)$ i ma długość 5. Zatem wektor jednostkowy tego wektora to $\bar{v} = (3/5, 4/5)$. Wiemy, że

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = (2x - 2xy + 3y^2, -x^2 + 6xy),$$

a więc

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(P) = \langle (3,9), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \rangle = \frac{9}{5} + \frac{36}{5} = 9.$$

Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, to pochodne cząstkowe wyznaczają powierzchnię styczną w $\mathbb{R}^{n+1}$ do wykresu funkcji f w punkcie $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ przez następujące równanie

$$x_{n+1} = f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)(x_i - x_i^0).$$

W przypadku, gdy $n = 2$ wzór na płaszczyzną styczną jest następujący

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0), \text{ gdzie } z_0 = f(x_0,y_0).$$

Przykład. Wyznaczmy płaszczyzną styczną do funkcji $f(x,y) = x^2+3xy$ w punkcie $(1,2)$. Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+3y$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x$, więc $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3$, a płaszczyzna styczna ma równanie

$$z = 7 + 8(x-1) + 3(y-2).$$

Definicja. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym, gdy dla dowolnych punktów $\bar{x}$, $\bar{y}$ należących do U odcinek łączący te punkty, tzn.

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \{\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x}) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

zawarty jest w U.

Twierdzenie 2.5. *Niech $f : U \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją różniczkowalną, gdzie $U \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym i wypukłym. Jeśli wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f są ograniczone, to f jest funkcją Lipschitza.*

Dowód. Oznaczmy

$$L_i = \sup_{\bar{x}\in U} \|\operatorname{grad}_{\bar{x}} f_i\| \text{ dla } i = 1, \ldots, m.$$

Ponieważ wszystkie pochodne cząstkowe są ograniczone, więc są to liczby skończone. Weźmy dowolne punkty $\bar{x}$, $\bar{y}$ w zbiorze U. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ rozważmy funkcję $\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_i(t) = f_i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x}))$. Ponieważ U jest zbiorem wypukłym, więc funkcja φ_i jest dobrze określona i ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych. Ponadto, jest różniczkowalna na $(0,1)$ ponieważ f ma wszystkie pochodne kierunkowe. Zatem z twierdzenia Lagrange'a istnieje $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$f_i(\bar{y}) - f_i(\bar{x}) = \varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \varphi_i'(\theta).$$

Niech $\bar{v} = (\bar{y} - \bar{x})$, wtedy

$$\varphi_i'(\theta) = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{v}}(\bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x}))\|\bar{y} - \bar{x}\|.$$

Stąd

$$|f_i(\bar{y}) - f_i(\bar{x})| \;=\; |\frac{\partial f_i}{\partial \bar{v}}(\bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x}))| = |\langle \operatorname{grad}_{\bar{x}+\theta(\bar{y}-\bar{x})} f_i, \bar{v}\rangle| \leqslant L_i\|\bar{y} - \bar{x}\|.$$

Ponieważ

$$\|f(\bar{y}) - f(\bar{x})\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(\bar{y}) - f_i(\bar{x})|,$$

więc

$$\|f(\bar{y}) - f(\bar{x})\| \leqslant L\|\bar{y} - \bar{x}\|, \text{ gdzie } L = \sum_{i=1}^{m} L_i.$$

□

Wniosek 2.6. *Niech $f : U \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją różniczkowalną, gdzie $U \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym i wypukłym, której pochodne cząstkowe są ciągłe. Niech $A \subset U$ będzie zbiorem domkniętym, ograniczonym i wypukłym. Wówczas $f : A \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją Lipschitza.*

Dowód. Ponieważ zbiór A jest zwarty, więc z twierdzenia Weierstrassa pochodne cząstkowe muszą być na tym zbiorze ograniczone. □

Uwaga. Niech $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym. Oznaczmy

$$\|A\| = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\|.$$

Norma ta jest dobrze określona ponieważ odwzorowanie $\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto \|A\bar{x}\| \in \mathbb{R}$ jest ciągłe, a zbiór $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{x}\| = 1\}$ jest zwarty. Zauważmy, że

$$\|A\bar{x}\| \leqslant \|A\|\|\bar{x}\| \text{ dla dowolnych } \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Rzeczywiście, jeśli $\bar{x} = 0$, to w sposób oczywisty otrzymujemy równość. W przeciwnym przypadku rozważmy $\bar{y} = \bar{x}/\|\bar{x}\|$. Wówczas $\|\bar{y}\| = 1$, zatem

$$\|A\bar{x}\| = \|A(\|\bar{x}\|\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|})\| = \|\bar{x}\|\|A\bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\|\|A\|.$$

Twierdzenie 2.7. *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ będą podzbiorami otwartymi. Załóżmy, że funkcja $f : U \to V$ jest różniczkowalna w punkcie $\bar{x} \in U$ oraz funkcja $g : V \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w $f(\bar{x}) \in V$. Wówczas złożenie $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją różniczkowalną w $\bar{x}$ oraz*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}).$$

Dowód. Oznaczmy $A = f'(\bar{x})$ oraz $B = g'(f(\bar{x}))$. Musimy pokazać, że

$$\lim_{\bar{h}\to 0} \frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h})) - g(f(\bar{x})) - BA\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} = 0.$$

Z ciągłości funkcji f w $\bar{x}$ wiemy, że

$$\lim_{\bar{h}\to 0}(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})) = 0.$$

Zatem z różniczkowalności funkcji g w $f(\bar{x})$ mamy

$$\begin{aligned} &\frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h})) - g(f(\bar{x})) - B(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}))\|}{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|} = \\ &= \frac{\|g(f(\bar{x}) + (f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}))) - g(f(\bar{x})) - B(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}))\|}{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|} \to 0, \end{aligned} \tag{4}$$

gdy $\bar{h} \to 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} \frac{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|}{\|h\|} &\leqslant \frac{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - A\bar{h}\|}{\|h\|} + \frac{\|A\bar{h}\|}{\|h\|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - A\bar{h}\|}{\|h\|} + \|A\| \leqslant \|A\| + 1, \end{aligned}$$

gdy $\|h\|$ jest odpowiednio małe z różniczkowalności f w $\bar{x}$. Zatem

$$\begin{aligned} &\frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h})) - g(f(\bar{x})) - BA\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h})) - g(f(\bar{x})) - B(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}))\|}{\|\bar{h}\|} \\ &\quad + \frac{\|B(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - A\bar{h})\|}{\|\bar{h}\|} \\ &\leqslant \frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h})) - g(f(\bar{x})) - B(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}))\|}{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|} \frac{\|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|}{\|h\|} \\ &\quad + \|B\| \frac{\|(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - A\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\|g(f(\bar{x}+\bar{h}))-g(f(\bar{x}))-B(f(\bar{x}+\bar{h})-f(\bar{x}))\|}{\|f(\bar{x}+\bar{h})-f(\bar{x})}(\|A\|+1) \\
&+\|B\|\frac{\|(f(\bar{x}+\bar{h})-f(\bar{x})-A\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|},
\end{aligned}$$

więc teraz zbieżność do zera przy $\bar{h} \to 0$ wynika z (4) oraz z z różniczkowalności f w $\bar{x}$. □

Uwaga. Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oraz $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, z poprzedniego twierdzenia mamy

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(\bar{x})) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(\bar{x})) \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{array}\right],$$

stąd

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(\bar{x}))\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(\bar{x}))\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{array}\right].$$

Zatem

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_k}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(\bar{x}))\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}).$$

Przykład. 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne oraz $\varphi(x,y) = g(f(x,y))$, wtedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Stąd wynika, że dowolna funkcja postaci $\varphi(x,y) = g(x^2+y^2)$ spełnia równanie

$$y\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Istotnie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = g'(x^2+y^2)2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = g'(x^2+y^2)2y,$$

stąd

$$y\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi}{\partial y} = yg'(x^2+y^2)2x - xg'(x^2+y^2)2y = 0.$$

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne oraz $\varphi(x) = g(f(x))$, wtedy

$$\varphi'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x))f_1'(x) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(x))f_2'(x).$$

Zatem jeśli funkcje różniczkowalne $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t)), \quad y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t)),$$

dla pewnej funkcji różniczkowalnej $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, to odwzorowanie $\varphi(t) = H(x(t),y(t))$ jest stała. Istotnie

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) = \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t)) - \frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t)) = 0.
\end{aligned}$$

2.1 Pochodne wyższych rzędów

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ ma pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ na całym zbiorze U oraz $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ ma pochodną cząstkową względem x_j w punkcie $\bar{x} \in U$, to liczbę

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\bar{x})$$

nazywamy *pochodną cząstkową drugiego rzędu* funkcji f względem x_i i x_j w punkcie $\bar{x}$ i oznaczamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}), \quad f_{x_j x_i}(\bar{x}) \quad \text{lub } D_{x_j x_i} f(\bar{x}).$$

Przykład. Obliczmy pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji $f(x,y) = x^2y - 3xy^2 - 2x^2$. Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 3y^2 - 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 6xy,$$

zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 2y - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x - 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = -6x.$$

Pochodne cząstkowe $f_{x_i x_j}$ i $f_{x_j x_i}$ mogą się różnić, najczęściej jednak będą równe, co pokazuje następujące twierdzenie. Pochodne cząstkowe odpowiadające różnym współrzędnym x_i i x_j nazywamy *mieszanymi*.

Twierdzenie 2.8. *Jeśli dla funkcji $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ pochodne cząstkowe drugiego rzędu $f_{x_i x_j}$ i $f_{x_j x_i}$ istnieją na całym zbiorze U oraz są ciągłe, to dla dowolnego $\bar{x} \in U$ mamy $f_{x_i x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_i}(\bar{x})$.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Rozważmy funkcję dwóch zmiennych

$$g(x,y) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Wówczas $g_{xy}(x_i x_j) = f_{x_i x_j}(\bar{x})$, $g_{yx}(x_i x_j) = f_{x_j x_i}(\bar{x})$ oraz g_{xy}, g_{yx} są ciągłe. Zatem wystarczy pokazać, że $g_{xy} = g_{yx}$. Dla dowolnych h, k bliskich zeru rozważmy wyrażenie

$$a = g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x,y)$$

oraz funkcje

$$\varphi(x,y) = g(x+h,y) - g(x,y), \quad \psi(x,y) = g(x, y+k) - g(x,y).$$

Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy, że

$$a = \varphi(x, y+k) - \varphi(x,y) = k\varphi_y(x, y+\theta_1 k),$$

$$\varphi_y(x, y+\theta_1 k) = g_y(x+h, y+\theta_1 k) - g_y(x, y+\theta_1 k) = hg_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)$$

dla pewnych $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Stąd

$$a = khg_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k).$$

Postępując podobnie dla funkcji ψ otrzymujemy

$$a = hkg_{yx}(x + \theta_2' h, y + \theta_1' k)$$

dla pewnych $\theta_1', \theta_2' \in (0,1)$. Zatem

$$g_{xy}(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k) = g_{yx}(x + \theta_2' h, y + \theta_1' k).$$

Zbiegając teraz $(h,k) \to (0,0)$ i korzystając z ciągłości g_{yx} i g_{xy} otrzymujemy $g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y)$ □

Definicja. Pochodne cząstkowe wyższego rzędu definiujemy analogicznie jak pochodne drugiego rzędu. Pochodne cząstkowe trzeciego rzędu możemy określić, gdy wszystkie pochodne drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ istnieją dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$ i posiadają pochodne cząstkowe. Wówczas stosujemy oznaczenie

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right).$$

Ogólnie pochodne cząstkowe rzędu $r+1$ określamy rekurencyjnie. Możemy je określić, gdy wszystkie pochodne r–tego rzędu $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}}$ istnieją dla wszystkich $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$ i posiadają pochodne cząstkowe. Wówczas stosujemy oznaczenie

$$\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_{r+1}} \partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}}\right).$$

Przykład. Obliczmy wszystkie pochodne cząstkowe trzeciego rzędu dla funkcji $f(x,y) = x^3 + 2xy^3$. Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy^2,$$

zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12xy,$$

stąd

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 6, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 12y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 12x.$$

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, jest klasy C^r, gdy istnieją wszystkie pochodne r–tego rzędu $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}}$ dla $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$ oraz są funkcjami ciągłymi. Wówczas dla dowolnego punktu $\bar{x} \in U$ pochodną rzędu r funkcji f w punkcie $\bar{x}$ nazywamy odwzorowanie r–liniowe

$$d^r f(\bar{x}) : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{r} \to \mathbb{R}$$

określone wzorem

$$d^r f(\bar{x})(\bar{h}^1, \ldots, \bar{h}^r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}}(\bar{x}) h_{i_1}^1 \ldots h_{i_r}^r,$$

przy czym $\bar{h}^j = (h_1^j, \ldots, h_n^j)$ dla $j = 1, \ldots, r$.

Przykład. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ druga pochodna to odwzorowanie 2–liniowe

$$\begin{aligned} & d^2f(x,y)((h_1,h_2),(k_1,k_2)) = \\ = \; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_1k_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)h_2k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2k_2. \end{aligned}$$

Zatem jej forma kwadratowa jest postaci

$$d^2f(x,y)((h_1,h_2),(h_1,h_2)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2.$$

Idąc dalej można pokazać, że

$$d^rf(x,y)(h_1,h_2)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i} \partial y^i}(x,y)h_1^{r-i}h_2^i.$$

Uwaga. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i wypukłym, będzie funkcją klasy C^r. Ustalmy punkt $\bar{x}_0 \in U$ oraz wektor $\bar{h}$ taki, że $\bar{x}_0 + \bar{h} \in U$. Następnie rozważmy funkcję $g(t) = f(\bar{x}_0 + t\bar{h})$. Jest ona określona na pewnym otwartym przedziale zawierającym $[0,1]$. Wówczas funkcja g jest klasy C^r oraz

$$g^{(r)}(t) = d^rf(\bar{x}_0 + t\bar{h})\bar{h}^r.$$

Będziemy korzystać z notacji $\frac{d}{dt}g(t) = g'(t)$. Aby uzasadnić ten wzór dla $r = 1$ rozważmy funkcję $h(t) = \bar{x}_0 + t\bar{h}$. Wtedy $h'(t) = \bar{h}$ oraz ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy

$$g'(t) = (f \circ h)'(t) = f'(h(t))h'(t) = df(\bar{x}_0 + t\bar{h})\bar{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h})h_i.$$

Stąd

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h})h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h})\right)h_i.$$

Korzystając ponownie ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h})\right)h_jh_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h})h_ih_j = d^2f(\bar{x}_0 + t\bar{h})(\bar{h},\bar{h}). \end{aligned}$$

Dla wyższych r wzór dowodzi się indukcyjnie względem r, krok indukcyjny jest podobny do przed chwila przedstawionych rozważań.

Twierdzenie 2.9 (wzór Taylora)**.** *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym oraz niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{m+1}. Wówczas dla dowolnych $\bar{x}, \bar{x} + \bar{h} \in U$ istnieje $0 < \theta < 1$ taka, że*

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^kf(\bar{x})\bar{h}^k}{k!} + \frac{d^{m+1}f(\bar{x} + \theta\bar{h})\bar{h}^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję pomocniczą $\varphi(t) = f(\bar{x} + t\bar{h})$, która jest klasy C^m na odcinku otwartym zawierającym przedział $[0,1]$. Zatem korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji jednej, wiemy, że istnieje $0 < \theta < 1$ taka, że

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Z drugiej strony

$$\varphi^{(k)}(t) = d^k f(\bar{x} + t\bar{h})\bar{h}^k$$

dla dowolnego $k = 0, \ldots, m+1$. Stąd

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = f(\bar{x}) + d^k f(\bar{x})\bar{h} + \frac{d^2 f(\bar{x})\bar{h}^2}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(\bar{x})\bar{h}^m}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\bar{x} + \theta\bar{h})\bar{h}^{m+1}}{(m+1)!}.$$

□

Wniosek 2.10. *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym oraz niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{m+1}. Wówczas dla dowolnego $\bar{x} \in U$ mamy*

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(\bar{x})\bar{h}^k}{k!} + O(\|\bar{h}\|^{m+1}).$$

Przykład. Rozwińmy funkcję $f(x,y) = e^x \sin y$ w szereg Taylora w punkcie $(0,0)$ dla $m = 3$. W tym przypadku

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -e^x \cos y.$$

Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = -1.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
& f(0,0) + df(0,0)(x,y) + \frac{1}{2} d^2 f(0,0)(x,y)^2 + \frac{1}{6} d^3 f(0,0)(x,y)^3 = \\
&= \quad f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \\
& \quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\Big) = \\
& \quad + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)x^2 y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\Big) = \\
&= \quad y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$e^x \sin y \;=\; y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + O(\|(x,y)\|^4) = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + O(\max\{x^4, y^4\}).$$

2.2 Ekstrema lokalne

Definicja. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Mówimy, że punkt $\bar{x}_0 \in U$ jest

- *minimum lokalnym* funkcji f, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in B(\bar{x}_0, \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$;
- *maksimum lokalnym* funkcji f, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in B(\bar{x}_0, \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Minima i maksima lokalne funkcji będziemy nazywać *ekstremami lokalnymi.*

Twierdzenie 2.11 (warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** *niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe w punkcie $\bar{x}_0 \in U$ oraz ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0 \ \text{dla} \ i = 1, \ldots, n.$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f w punkcie $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in U$ ma maksimum lokalne. Następnie ustalmy $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz rozważmy funkcję

$$g_i(x) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Z założenia funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie x_i^0 oraz ma maksimum lokalne. Zatem możemy skorzystać z warunku koniecznego istnienia ekstremum dla funkcji jednej zmiennej, a mówi on, że $g_i'(x_i^0) = 0$. Z drugiej strony

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = g_i'(x_i^0) = 0.$$

□

Uwaga. Z każdą $n \times n$ macierzą rzeczywistą $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ możemy stowarzyszyć formę dwuliniową na $\mathbb{R}^n$ postaci

$$A((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Przypomnijmy, że macierz A (formę A) nazywamy dodatnio (ujemnie) określoną, gdy

$$A(\bar{x}, \bar{x}) > 0 \ (< 0) \ \text{dla dowolnego niezerowego} \ \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ponadto, mówimy, że A jest nieokreślona, gdy odwzorowanie $\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto A(\bar{x}, \bar{x}) \in \mathbb{R}$ przyjmuje zarówno wartości dodatnie i ujemne.

Dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$ oznaczmy

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 2.12 (kryterium Sylvestera). *Załóżmy, że macierz A jest symetryczna. Wtedy macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Macierz A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^i \det(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Jeśli macierz A nie spełnia żadnego z warunków*

$$\forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \det(A_i) \geqslant 0, \ \ \forall_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i \det(A_i) \geqslant 0,$$

to A jest nieokreślona.

Twierdzenie 2.13 (warunki dostateczne istnienia ekstremum). *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Załóżmy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2 oraz w punkcie $\bar{x}_0 \in U$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0$ dla $i = 1, \dots, n$. Wtedy*

- *jeśli $d^2 f(\bar{x}_0)$ jest formą dodatnio określoną, to f ma w $\bar{x}_0$ minimum lokalne;*
- *jeśli $d^2 f(\bar{x}_0)$ jest formą ujemnie określoną, to f ma w $\bar{x}_0$ maksimum lokalne;*
- *jeśli $d^2 f(\bar{x}_0)$ jest formą nieokreśloną, to f nie ma w $\bar{x}_0$ ekstremum lokalnego.*

Dowód. Załóżmy, $d^2 f(\bar{x}_0)$ jest formą dodatnio określoną oraz przypuśćmy, że f nie ma w $\bar{x}_0$ minimum lokalnego. Wówczas istnieje ciąg punktów $\{\bar{x}_m\}$ w U taki, że $\bar{x}_m \to \bar{x}_0$ oraz $f(\bar{x}_m) < f(\bar{x}_0)$ dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$. Wówczas ze wzoru Taylora dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $0 < \theta_m < 1$ taka, że

$$f(\bar{x}_m) = f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0)(\bar{x}_m - \bar{x}_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0 + \theta_m(\bar{x}_m - \bar{x}_0))(\bar{x}_m - \bar{x}_0)^2.$$

Ponieważ z założenia $df(\bar{x}_0) = 0$ oraz $f(\bar{x}_m) < f(\bar{x}_0)$ dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$, więc

$$d^2 f(\bar{x}_0 + \theta_m(\bar{x}_m - \bar{x}_0))(\bar{x}_m - \bar{x}_0)^2 < 0.$$

Niech $\bar{h}_m = (\bar{x}_m - \bar{x}_0)/\|\bar{x}_m - \bar{x}_0\|$. Ponieważ $\bar{h}_m \in S^{n-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| = 1\}$ oraz S^{n-1} jest zbiorem zwartym, więc istnieje podciąg $\{k_m\}$ taki, że $\bar{h}_{k_m} \to \bar{h} \in S^{n-1}$. Ponadto

$$d^2 f(\bar{x}_0 + \theta_m(\bar{x}_m - \bar{x}_0))(\bar{h}_m)^2 = \frac{1}{\|\bar{x}_m - \bar{x}_0\|^2} d^2 f(\bar{x}_0 + \theta_m(\bar{x}_m - \bar{x}_0))(\bar{x}_m - \bar{x}_0)^2 < 0$$

oraz z ciągłości drugiej pochodnej otrzymujemy

$$d^2 f(\bar{x}_0)(\bar{h})^2 = \lim_{m \to \infty} d^2 f(\bar{x}_0 + \theta_{k_m}(\bar{x}_{k_m} - \bar{x}_0))(\bar{h}_{k_m})^2 \leqslant 0,$$

co stoi w sprzeczności z założeniem, że forma $d^2 f(\bar{x}_0)$ jest dodatnio określona. □

Przykład. Zbadajmy ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x$. Ponieważ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y - 6, \ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 8y,$$

więc jeśli w punkcie (x_0, y_0) ma ekstremum, to

$$2x_0 + 2y_0 - 6 = 0, \ \ 2x_0 + 8y_0 = 0.$$

Jedynym punktem spełniającym ten układ równań jest $(4, -1)$. Macierz drugiej pochodnej to

$$d^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ta macierz jest dodatnio określona ponieważ $\det A_1 = 2 > 0$ oraz $\det A_2 = 12 > 0$. Zatem $d^2 f(4, -1)$ jest dodatnio określona, a więc f ma minimum lokalne w punkcie $(4, -1)$ i jest to jedyne ekstremum lokalne tej funkcji.

Przykład. Rozważmy funkcję $f(x, y) = x^2 - y^2$. Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y,$$

zatem jedynym punktem podejrzanym o ekstremum jest $(0, 0)$. Ponadto

$$d^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\det A_1 = 2 > 0$ oraz $\det A_2 = -4 < 0$, a więc $d^2 f(0, 0)$ jest nieokreślona. Zatem f nie ma ekstremów lokalnych. W tym wypadku $(0, 0)$ jest punktem siodłowym funkcji f.

Uwaga. Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która jest różniczkowalna we wnętrzu zbioru D. Z twierdzenia Weierstrassa funkcja ta przyjmuje na zbiorze D wartość najmniejszą i największą. Aby wyznaczyć te wartości wyznaczamy wszystkie ekstrema w zbiorze D, a następnie sprawdzamy, w którym z tych punktów funkcja przyjmuje wartość najmniejszą i największą. Aby wyznaczyć ekstrema znajdujące się we wnętrzu zbioru D możemy zastosować warunek konieczny istnienia ekstremum, tzn. wyznaczamy wszystkie punkty, w których pochodna jest równa zero. Sytuacja staje się bardziej skomplikowana, gdy ekstrema pojawiają się na brzegu zbioru D. Aby je wyznaczyć będziemy potrzebować bardziej wyrafinowanych narzędzi.

Definicja. Niech (X_1, ρ_1) oraz (X_2, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X_1 \to X_2$ nazywamy *homeomorfizmem*, gdy jest ciągłe odwracalne i odwzorowanie odwrotne f^{-1} też jest ciągłe.

Definicja. Niech $U, V \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi. Funkcję $f : U \to V$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy C^r*, gdy f jest bijekcją klasy C^r oraz funkcja odwrotna $f^{-1} : V \to U$ jest również klasy C^r.

Przykład. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Jest ona bijekcją klasy C^r dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$. Jednak jej funkcja odwrotna $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ nie jest nawet różniczkowalna w 0, więc nie jest dyfeomorfizmem.

Uwaga. Niech $f : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1. Ponieważ $f^{-1} \circ f = Id$, ze wzoru na pochodną funkcji złożonej dla dowolnego $\bar{x} \in U$ otrzymujemy

$$(f^{-1})'(f(\bar{x}))f'(\bar{x}) = Id.$$

Zatem $f'(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym odwracalnym, a jego odwzorowanie odwrotne, to $(f^{-1})'(f(\bar{x}))$.

Funkcję $J_f(\bar{x}) = \det f'(\bar{x})$ nazywamy *jakobianem* odwzorowania f. Zatem jeśli f jest dyfeomorfizmem, to $J_f(\bar{x}) \neq 0$ dla dowolnego $\bar{x} \in U$.

Twierdzenie 2.14 (o lokalnym odwracaniu odwzorowań)**.** *Niech $f : G \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1 na zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że dla pewnego punktu $\bar{x}_0 \in G$ pochodna $f'(\bar{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym odwracalnym (równoważnie $J_f(\bar{x}_0) \neq 0$). Wówczas istnieją otwarte otoczenia $\bar{x}_0 \in U$ oraz $f(\bar{x}_0) \in V$ takie, że $f : U \to V$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1.*

Przykład. Rozważmy funkcję $f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Wówczas

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix},$$

a więc $J_f(x, y) = \det f(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x \neq 0$. Zatem lokalnie wokół każdego punktu z dziedziny funkcja f jest odwracalna, a nawet jest dyfeomorfizmem. Jednak globalnie funkcja nie jest nawet odwracalna ponieważ $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$.

2.3 Funkcje uwikłane

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją. Formalnie ta funkcja jest relacją w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ wyznaczoną w ten sposób, że

$$x\sim_f y \Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow F(x,y)=0,\ \text{gdzie } F(x,y)=y-f(x).$$

Zatem równanie $F(x,y)=0$ jest również podaniem wzoru na funkcję f, ale w sposób uwikłany.

Jeśli $f:U\to\mathbb{R}^m$, gdzie $U\subset\mathbb{R}^n$, to możemy ją wyrazić w sposób uwikłany równaniem $F(\bar{x},\bar{y})=0$, gdzie $F:U\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $F(\bar{x},\bar{y})=\bar{y}-f(\bar{x})$.

Rozważmy teraz odwrotną sytuację, załóżmy, że dana jest funkcja klasy $F:U\times V\to\mathbb{R}^m$, gdzie $U\subset\mathbb{R}^n$ oraz $V\subset\mathbb{R}^m$. Spróbujemy określić kiedy równanie (układ równań)

$$F(\bar{x},\bar{y})=0\Leftrightarrow F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \text{ dla } i=1,\ldots,m$$

$(F=(F_1,\ldots,F_m))$ wyznacza funkcję $f:U\to V$ klasy C^1.

Przykład. Rozważmy równanie postaci $x^2+y^2=1\Leftrightarrow F(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Wtedy dla każdego punktu (x_0,y_0), $y_0\neq 0$ równanie to wyznacza lokalnie wokół tego punktu funkcję postaci $f(x)=\operatorname{sgn}(y_0)\sqrt{1-x^2}$.

Twierdzenie 2.15 (o funkcji uwikłanej)**.** *Niech $F:G\to\mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1, gdzie $G\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym. Niech $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$, $\bar{y}_0\in\mathbb{R}^m$, $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)\in G$ będzie punktem takim, że $F(\bar{x}_0,\bar{y}_0)=0$. Przez $F_{\bar{x}_0}$ oznaczmy funkcję z otoczenia punktu $\bar{y}_0\in\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^m$ daną wzorem $F_{\bar{x}_0}(\bar{y})=F(\bar{x}_0,\bar{y})$. Jeśli $F'_{\bar{x}_0}(\bar{y}_0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem odwracalnym, to istnieją otoczenia otwarte $\bar{x}_0\in U$ oraz $\bar{y}_0\in V$ oraz funkcja $f:U\to V$ klasy C^1 taka, że jeśli $\bar{x}\in U$ oraz $\bar{y}\in V$, to*

$$F(\bar{x},\bar{y})=0\Leftrightarrow\bar{y}=f(\bar{x}),$$

tzn. równanie $F(\bar{x},\bar{y})=0$ wyznacza funkcję klasy C^1 wokół punktu $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$.

Uwaga. Gdy $m=1$, to kluczowy warunek podany w twierdzeniu jest równoważny stwierdzeniu, że $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0,y_0)\neq 0$. Zauważmy, że dla funkcji $F(x,y)=x^2+y^2-1$ mamy $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y$, zatem nie jest on spełniony tylko dla punktów $(1,0)$ i $(-1,0)$. Łatwo zauważyć, że wokół tych punktów równanie $F(x,y)=0$ nie może być uwikłaniem żadnej funkcji zmiennej x.

Przykład. Rozważmy równanie

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Niech $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Wówczas

$$F_y(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2},\ F_x(x,y)=\frac{y+x}{x^2+y^2}.$$

Zatem jeśli (x_0,y_0) spełnia nasze równanie oraz $x_0\neq y_0$, to istnieje funkcja $x\mapsto y(x)$ wokół tego punktu taka, że $F(x,y(x))=0$. Możemy nawet wyznaczyć pochodną funkcji y. Otóż

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y(x))=F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))y'(x),$$

a więc

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}=\frac{x+y(x)}{x-y(x)}.$$

2.4 Powierzchnie

Definicja. Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *k-wymiarową powierzchnią* ($1 \leqslant k \leqslant n$), gdy dla dowolnego punktu $\bar{y}_0 \in M$ istnieje otoczenie otwarte $\bar{y}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, podzbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^k$ oraz odwzorowanie $\varphi : V \to U$ klasy C^1 takie, że rząd odwzorowania liniowego $\varphi'(\bar{x}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ jest równy k dla dowolnego $\bar{x} \in V$, $\varphi : V \to \varphi(V)$ jest homeomorfizmem oraz $\varphi(V) = M \cap U$. Wówczas odwzorowanie φ nazywamy *mapą* lub *parametryzają* zbioru $M \cap U$, a zbiór $\varphi(V) = M \cap U$ *płatem*.

Uwaga. Niech $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą klasy C^1, tzn. γ jest klasy C^1 oraz $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem niezerowym dla dowolnego $t \in (a, b)$. Załóżmy, że krzywa γ nie ma samoprzecięć, tzn. γ jest różnowartościowa oraz jeśli $\gamma(t_n) \to \gamma(t)$, to $t_n \to t$. Wówczas $\gamma(a, b)$ jest powierzchnią 1-wymiarową, a jej parametryzają jest funkcja γ.

Przykład. $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. Wówczas

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)), \text{ więc } \|\gamma'(t)\|^2 = 2e^{2t} > 0.$$

Ponadto, jeśli $\gamma(t_n) \to \gamma(t)$, to $e^{t_n} = \|\gamma(t_n)\| \to \|\gamma(t)\| = e^t$, a z ciągłości logarytmu $t_n \to t$.

Uwaga. Niech $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, będzie funkcją klasy C^1. Wówczas wykres tej funkcji $M = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest powierzchnią wymiaru n. Globalną mapą jest funkcja $\varphi : U \to M$, $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}, f(\bar{x}))$. Funkcja φ jest bijekcją, a funkcja odwrotną jest rzutowanie na pierwsze n współrzędnych. Ponadto

$$\varphi'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ & f'(\bar{x}) & \end{bmatrix}$$

zatem rząd tego przekształcenia wynosi n. Stąd wykres funkcji f jest n wymiarowym płatem.

Twierdzenie 2.16. *Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz niech $g : G \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1 oraz $1 \leqslant m < n$. Rozważmy zbiór $M = \{\bar{x} \in G : g(\bar{x}) = 0\}$. Jeśli dla dowolnego $\bar{x} \in M$ mamy $\operatorname{rz} g'(\bar{x}) = m$, to M jest powierzchnią wymiaru $n - m$.*

Dowód. Niech $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in M$. Ponieważ rząd $m \times n$ macierzy $g'(\bar{x}_0)$ wynosi m, więc znajdziemy m jej kolumn, które są liniowo niezależne. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy założyć, jest to m ostatnich kolumn. Niech $k = n - m$. Wówczas $g'_{(x_1^0,\ldots,x_k^0)}(x_{k+1}^0, \ldots, x_{k+m}^0)$ jest $m \times m$ macierzą składającą się z tych m kolumn. A więc $g'_{(x_1^0,\ldots,x_k^0)}(x_{k+1}^0, \ldots, x_{k+m}^0)$ jest odwzorowaniem odwracalnym. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieją zbiory otwarte $(x_1^0, \ldots, x_k^0) \in U \subset \mathbb{R}^k$, $(x_{k+1}^0, \ldots, x_{k+m}^0) \in V \subset \mathbb{R}^m$ oraz funkcja $f : U \to V$ klasy C^1 taka, że jeśli $(x_1, \ldots, x_n) \in U \times V$, to

$$\bar{x} \in M \Leftrightarrow g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow (x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}) = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Zatem

$$M \cap (U \times V) = \{\bar{y} \in U : (\bar{y}, f(\bar{y}))\}$$

oraz $\bar{x}_0 \in M \cap (U \times V)$. Z poprzedniej uwagi zbiór ten, który jest wykresem funkcji f, jest k–wymiarowym płatem, a więc cały zbiór M jest k–wymiarową powierzchnią. $\square$

Przykład. Sfera dwuwymiarowa

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

jest powierzchnią dwuwymiarową. Rozważmy funkcję $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Wówczas $g'(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Jeśli $(x,y,z) \in S^2$, to przynajmniej jedna współrzędna jest niezerowa, zatem rząd $g'(x,y,z)$ jest równy 1. Tak więc S^2 jest powierzchnią wymiaru $3-1=2$.

Przykład. Rozważmy podzbiór $\mathbb{R}^3$ postaci

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x+y+z = 0\}.$$

Wówczas

$$g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z)$$

oraz

$$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $(x,y,z) \in M$, to nie wszystkie współrzędne są sobie równe, a stąd rząd macierzy $g'(x,y,z)$ wynosi 2. Zatem M jest powierzchnią wymiaru $3-2=1$.

2.5 Ekstrema warunkowe

Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz niech $f : G \to \mathbb{R}$ oraz $g : G \to \mathbb{R}^m$ będą funkcją klasy C^1 oraz $1 \leqslant m < n$. Rozważmy zbiór $M = \{\bar{x} \in G : g(\bar{x}) = 0\}$. Następnie rozważmy funkcję $f : M \to \mathbb{R}$. Naszym celem jest wyznaczenie ekstremów tej funkcji. Ponieważ dziedzina tej funkcji jest wyznaczona warunkiem $g(\bar{x}) = 0$, więc będziemy mówić o ekstremach warunkowych.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma lokalne maksimum warunkowe w $\bar{x}_0 \in M$, gdy

$$\exists_{\delta>0} \forall_{\bar{x} \in B(\bar{x}_0,\delta) \cap M}\ f(\bar{x}) \leqslant f(\bar{x}_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma lokalne minimum warunkowe w $\bar{x}_0 \in M$, gdy

$$\exists_{\delta>0} \forall_{\bar{x} \in B(\bar{x}_0,\delta) \cap M}\ f(\bar{x}) \geqslant f(\bar{x}_0).$$

Minima i maksima warunkowe nazywamy ekstremami warunkowymi.

Twierdzenie 2.17 (metoda mnożników Lagrange'a)**.** *Załóżmy, że dla dowolnego $\bar{x} \in M$ mamy* $\operatorname{rz} g'(\bar{x}) = m$*. Jeśli funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $\bar{x}_0 \in M$ ekstremum lokalne, to istnieją liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (mnożniki Lagrange'a) takie, że funkcja $L : G \to \mathbb{R}$ określona wzorem*

$$L(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\bar{x}),$$

spełnia warunek

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0 \ \textit{dla}\ i = 1, \ldots, n.$$

Załóżmy, że dodatkowo funkcje f i g są klasy C^2. Jeśli $d^2L(\bar{x}_0)\bar{h}^2 > 0$ dla wszystkich niezerowych $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$ spełniających

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}_0) h_i = 0 \ \textit{dla}\ j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

to $\bar{x}_0$ jest lokalnym minimum warunkowym funkcji f. Jeśli $d^2L(\bar{x}_0)\bar{h}^2 < 0$ dla wszystkich niezerowych $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$ spełniających (5), to $\bar{x}_0$ jest lokalnym maksimum warunkowym funkcji f.

Uwaga. Rozważmy $(n+m)\times(n+m)$ macierz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g'(\bar{x}_0) \\ g'(\bar{x}_0)^T & d^2L(\bar{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Wówczas warunek dostateczny istnienia minimum warunkowego jest równoważny warunkowi

$$(-1)^m \det C_i > 0 \text{ dla } i = 2m+1, \ldots, m+n,$$

natomiast warunek dostateczny istnienia maksimum warunkowego jest równoważny warunkowi

$$(-1)^{i-m} \det C_i > 0 \text{ dla } i = 2m+1, \ldots, m+n.$$

Przykład. Wyznaczmy ekstrema funkcji $f(x,y,z) = x+y+z$ pod warunkiem, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1)$. Rozważmy funkcję

$$L(x,y,z) = x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

Szukamy x, y, z oraz λ takich, że

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}L(x,y,z) = 1+2\lambda x, \quad 0 = \frac{\partial}{\partial y}L(x,y,z) = 1+2\lambda y,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}L(x,y,z) = 1+2\lambda z, \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Wówczas

$$3 = 4\lambda^2(x^2+y^2+z^2) = 4\lambda^2,$$

a więc mamy dwie możliwości $\lambda_1 = \sqrt{3}/2$ oraz $\lambda_1 = -\sqrt{3}/2$, rozważmy pierwszą z nich. Wtedy $x_0 = y_0 = z_0 = -1/\sqrt{3}$. Ponadto

$$d^2L(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy wartość tej formy kwadratowej dla wektorów (h_1,h_2,h_3) niezerowych spełniających warunek

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0,z_0)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0,z_0)h_2 + \frac{\partial}{\partial z}g(x_0,y_0,z_0)h_3 = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(h_1+h_2+h_3). \end{aligned}$$

Wtedy

$$d^2L(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)^2 = 2\lambda_1(h_1^2+h_2^2+h_3^2) > 0.$$

Zatem w punkcie $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ funkcja ma lokalne minimum warunkowe.

3 Całka Riemanna

Pojęcie całki Riemanna można w naturalny sposób uogólnić dla funkcji określonych na uogólnionych domkniętych prostokątach (prostopadłościanach) w przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Zbiór postaci

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m,$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ dla $i = 1, \ldots, m$ nazywamy *prostokątem (prostopadłościanem)*. Liczbę

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$$

nazywamy *objętością*, zaś

$$\delta(P) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_m - a_m)^2}$$

nazywamy *średnicą* prostokąta P.

Niech

$$a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i - 1} < x_i^{k_i} = b_i$$

będzie podziałem odcinka $[a_i, b_i]$ dla $i = 1, \ldots, m$. Taka rodzina podziałów wyznacza podział κ prostokąta P na prostokąty postaci

$$\kappa = \{[x_1^{l_1-1}, x_1^{l_1}] \times \ldots \times [x_m^{l_m-1}, x_m^{l_m}] : 1 \leqslant l_1 \leqslant k_1, \ldots, 1 \leqslant l_m \leqslant k_m\}.$$

Przez Π_P oznaczać będziemy zbiór wszystkich takich podziałów prostokąta P.

Niech $\kappa \in \Pi_P$ oraz $\kappa = \{P_1, \ldots, P_k\}$. Wtedy średnicą podziału κ nazywamy $\delta(\kappa) = \max\{\delta(P_i) : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Niech

$$m_i = \inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in P_i\}, \quad M_i = \sup\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in P_i\}$$

dla $i = 1, \ldots, k$. Następnie utwórzmy sumy górne i dolne

$$s(f, \kappa) = \sum_{i=1}^{n} m_i |P_i|, \quad S(f, \kappa) = \sum_{i=1}^{n} M_i |P_i|.$$

Niech

$$I_*(f) = \sup\{s(f, \kappa) : \kappa \in \Pi_P\} \text{ oraz } I^*(f) = \inf\{S(f, \kappa) : \kappa \in \Pi_P\}.$$

Wówczas $I_*(f) \leqslant I^*(f)$.

Definicja. Jeśli $I_*(f) = I^*(f)$, to mówimy, że funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest *całkowalna w sensie Riemanna*, a liczbę $I_*(f) = I^*(f)$ nazywamy *całką Riemanna* lub *całką wielokrotną* funkcji $f : P \to \mathbb{R}$ i oznaczamy

$$\begin{aligned} \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} &= \int \ldots \int_P f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m. \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku zwykłej całki Riemanna całkę wielokrotną można aproksymować ciągiem sum pośrednich. Niech $\kappa = \{P_1, \ldots, P_k\}$ będzie podziałem prostokąta P. Załóżmy, że $\bar{\xi}_i \in P_i$ dla $i = 1, \ldots, k$ i rozważmy sumę pośrednią $\sigma(f, \kappa) = \sum_{i=1}^{k} f(\bar{\xi}_i)|P_i|$. Niech $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów, tzn. $\delta(\kappa_n) \to 0$. Wówczas jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, to $\sigma(f, \kappa_n) \to \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x}$.

Wiele własności zwykłej całki Riemanna przenosi się na całki określone na prostokątach, a dowody tych własności są analogiczne.

Twierdzenie 3.1. *Jeśli funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna. Niech $f, g : P \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. Wówczas dla funkcje $f + g$, $f \cdot g$ oraz αf dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ są całkowalne oraz*

$$\int_P \alpha f(\bar{x})\, d\bar{x} = \alpha \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x},$$
$$\int_P (f(\bar{x}) + g(\bar{x}))\, d\bar{x} = \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} + \int_P g(\bar{x})\, d\bar{x},$$
$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} \leqslant \int_P g(\bar{x})\, d\bar{x},$$
$$\Big| \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} \Big| \leqslant \int_P |f(\bar{x})|\, d\bar{x}.$$

3.1 Całki iterowane

Niech $P = [a, b] \times [c, d]$ będzie prostokątem w $\mathbb{R}^2$. Załóżmy, że $f : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną taką, że dla dowolnego $y \in [c, d]$ całka $\int_a^b f(x, y)\, dx$ istnieje oraz funkcja $[c, d] \ni y \mapsto \int_a^b f(x, y)\, dx \in \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Wówczas całkę

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy,$$

którą nazywamy *całką iterowaną*. Analogicznie możemy zdefiniować całkę iterowaną

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Twierdzenie 3.2 (Fubiniego)**.** *Jeśli $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to obie całki iterowane istnieją oraz*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dowód. Niech $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$. Funkcja f jest ciągła i określona na zbiorze zwartym, więc jest jednostajnie ciągła. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\rho((x, y), (x', y')) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Stąd jeśli $|x - x'| < \delta$, to

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= \Big| \int_c^d (f(x, y) - f(x', y))\, dy \Big| \leqslant \int_c^d |f(x, y) - f(x', y)|\, dy \\ &\leqslant \int_c^d \varepsilon\, dy = (d - c)\varepsilon, \end{aligned}$$

więc g jest również jednostajnie ciągła i całki iterowane są dobrze określone.

Niech $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów. Załóżmy, że κ_n jest wyznaczony przez punkty

$$a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{k_n}^n = b, \quad c = y_0^n < y_1^n < \ldots < y_{l_n}^n = d.$$

Niech

$$\sigma(f, \kappa_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{l_n} f(\bar{\xi}_{i,j}) |P_{ij}|$$

będzie sumą pośrednią tzn. $\bar{\xi}_{ij} \in P_{ij} = [x_{i-1}^n, x_i^i] \times [y_{j-1}^n, y_j^n]$. Załóżmy, że $\delta(\kappa_n) < \delta$. Wówczas dla dowolnego $x \in [x_{i-1}^n, x_i^i]$ mamy

$$\begin{aligned} |\int_{y_{j-1}^n}^{y_j^n} f(x,y)dy - f(\bar{\xi}_{ij})(y_j^n - y_{j-1}^n)| &\leqslant \int_{y_{j-1}^n}^{y_j^n} |f(x,y) - f(\bar{\xi}_{ij})|dy \\ &\leqslant \varepsilon(y_j^n - y_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} &|\int_c^d f(x,y)dy - \sum_{j=1}^{l_n} f(\bar{\xi}_{ij})(y_j^n - y_{j-1}^n)| \\ \leqslant\ & \sum_{j=1}^{l_n} |\int_{y_{j-1}^n}^{y_j^n} f(x,y)dy - f(\bar{\xi}_{ij})(y_j^n - y_{j-1}^n)| \leqslant \sum_{j=1}^{l_n} \varepsilon(y_j^n - y_{j-1}^n) = \varepsilon(d-c). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} &|\int_{x_{i-1}^n}^{x_i^n} \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx - \sum_{j=1}^{l_n} f(\bar{\xi}_{ij})(y_j^n - y_{j-1}^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)| \\ &\leqslant\ \varepsilon(d-c)(x_i^n - x_{i-1}^n), \end{aligned}$$

a zatem

$$|\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx - \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{l_n} f(\bar{\xi}_{ij})|P_{ij}| \leqslant \varepsilon|P|.$$

Stąd wynika, że $\sigma(f, \kappa_n) \to \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$, ale z drugiej strony wiemy, że $\sigma(f, \kappa_n) \to \int_P f(x,y)\,dxdy$, co kończy dowód. □

Uwaga. Jeśli $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ jest prostokątem w $\mathbb{R}^m$, to możemy definiować $m!$ całek iterowanych w zależności od kolejności wykonywania całkowania. Jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to wszystkie te całki iterowane istnieją i są równe całce $\int_P f(\bar{x})\,d\bar{x}$, np.

$$\int_P f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{a_m}^{b_m} \left(\int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1\right) \ldots dx_{m-1}\right) dx_m.$$

Przykład. Obliczmy całkę $\int_{[1,2]\times[-1,0]}(yx^2 - y^3x)dxdy$. Ponieważ funkcja pod całką jest ciągła, więc wystarczy policzyć jedną z całek iterowanych, np.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \left(\int_1^2 (yx^2 - y^3x)dx\right) dy &= \int_{-1}^0 \left[\frac{yx^3}{3} - \frac{y^3x^2}{2}\right]_1^2 dy = \int_{-1}^0 \left(\frac{7y}{3} - \frac{3y^3}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{7y^2}{6} - \frac{3y^4}{8}\right]_{-1}^0 = -(\frac{7}{6} - \frac{3}{8}) = -\frac{19}{24}. \end{aligned}$$

Ale bez problemu możemy również policzyć drugą całkę iterowaną

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{-1}^0 (yx^2 - y^3x)dx\right) dy &= \int_1^2 \left[\frac{y^2x^2}{2} - \frac{y^4x}{4}\right]_{-1}^0 dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{8}\right]_1^2 = -\frac{7}{6} + \frac{3}{8} = -\frac{19}{24}. \end{aligned}$$

Całkę Riemanna możemy określić dla funkcji ograniczonych określonych na dowolnych ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}^m$. Niech $D \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem ograniczonym, a $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją ograniczoną. Niech $P \subset \mathbb{R}^m$ będzie dowolnym prostokątem takim, że $D \subset P$. Wówczas określmy funkcję $f_0 : P \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_0(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{gdy} \quad \bar{x} \in D \\ 0 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in P \setminus D. \end{cases}$$

Definicja. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna (w sensie Riemanna) w zbiorze D, gdy funkcja f_0 jest całkowalna w zbiorze P i całkę z funkcji f na zbiorze D określamy wzorem

$$\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_P f_0(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Dla tak określonych całek wszystkie podstawowe własności całek przepisują w łatwy sposób:

$$\int_D (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}))\,d\bar{x} = \alpha \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} + \beta \int_D g(\bar{x})\,d\bar{x},$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} \leqslant \int_D g(\bar{x})\,d\bar{x},$$

$$\Big| \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} \Big| \leqslant \int_D |f(\bar{x})|\,d\bar{x}.$$

Ponadto, jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^m$ są obszarami ograniczonymi taki, że $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ oraz całki $\int_{D_1} f(\bar{x})\,d\bar{x}$, $\int_{D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}$, to całka $\int_{D_1 \cup D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}$ istnieje oraz

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{D_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Istotnie jeśli P jest prostokątem, takim że $D_1 \cup D_2 \subset P$, to z definicji $\int_{D_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_P f_1(\bar{x})\,d\bar{x}$ oraz $\int_{D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_P f_2(\bar{x})\,d\bar{x}$, gdzie

$$f_1(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{gdy} \quad \bar{x} \in D_1 \\ 0 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in P \setminus D_1 \end{cases} \quad f_2(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{gdy} \quad \bar{x} \in D_2 \\ 0 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in P \setminus D_2. \end{cases}$$

Wtedy

$$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{gdy} \quad \bar{x} \in D_1 \cup D_2 \\ 0 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in P \setminus (D_1 \cup D_2), \end{cases}$$

zatem

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_P (f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}))\,d\bar{x} = \int_P f_1(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_P f_2(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{D_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Definicja. Niech $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Wówczas zbiór

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

nazywamy zbiorem *normalnym* względem osi Ox.

Twierdzenie 3.3 (Fubiniego dla obszarów normalnych)**.** *Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze normalnym*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

to funkcja f jest całkowalna w zbiorze D oraz

$$\int_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Uwaga. Zbiór normalny względem osi Oy określamy wzorem

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\},$$

$\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ są odpowiednimi funkcjami ciągłymi. Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Uwaga. Jeśli D jest sumą skończonej liczby zbiorów $D_1, \ldots, D_k$ normalnych względem osi Ox lub Oy o rozłącznych wnętrzach, to zbiór D nazywamy regularnym. Wówczas jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to jest całkowalna w D oraz

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} f(x, y)\, dxdy.$$

Przykład. Obliczmy całkę $\int_D xy\, dxdy$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym osiami Ox, Oy oraz prostą $x + y = 1$. Wówczas D jest zbiorem normalnym względem osi Ox oraz

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\},$$

więc

$$\begin{aligned} \int_D xy\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x - 2x^2 + x^3}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Uwaga. W przestrzeniach $\mathbb{R}^m$ dla $m \geqslant 3$ można mówić również o zbiorach normalnych. W $\mathbb{R}^3$ zbiory normalne są postaci

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x), \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\},$$

gdzie $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $\varphi, \psi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\} \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi takimi, że $\alpha \leqslant \beta$ oraz $\varphi \leqslant \psi$. Wówczas dla dowolnej funkcji ciągłej $f : D \to \mathbb{R}$ mamy

$$\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Przykład. Czworościan D w $\mathbb{R}^3$ ograniczony płaszczyzną $x + y + z = 1$ oraz trzema płaszczyznami przechodzącymi przez pary osi jest zbiorem normalnym. Wówczas

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}. \end{aligned}$$

3.2 Zamiana zmiennych

Definicja. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^m$ jest *mierzalny w sensie Jordana*, gdy stała równa 1 na zbiorze A jest całkowalna w sensie Riemanna. Wówczas liczbę

$$|A| = \int_A 1\, d\bar{x}$$

nazywamy *miarą Jordana* (polem powierzchni dla $m = 2$, objętością dla $m = 3$) zbioru A.

Zauważmy, że jeśli $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz $|A| = 0$, to $\int_A f(\bar{x})\, d\bar{x} = 0$. Istotnie, ponieważ f jest ograniczona, to mamy $|f| \leqslant C$. Stąd

$$0 \leqslant |\int_A f(\bar{x})\, d\bar{x}| \leqslant \int_A |f(\bar{x})|\, d\bar{x} \leqslant \int_A C\, d\bar{x} = C|A| = 0.$$

Uwaga. Jeśli A jest zawarty w pewnym prostokącie $P \subset \mathbb{R}^m$, to mierzalność A jest równoważna całkowalności funkcji

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in A \\ 0 & \text{gdy} \quad \bar{x} \in P \setminus A. \end{cases}$$

Zauważmy, że wtedy sumy górne (dolne) $S(\chi_A, \kappa)$ $(s(\chi_A, \kappa))$ przybliżają miarę A sumami objętości prostokątów podziału κ, które razem pokrywają (są zawarte) zbiór A.

Uwaga. Jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}^3$ jest postaci

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\},$$

gdzie $f, g : B \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi takimi, że $f \leqslant g$, to

$$|A| = \int_B (g(x, y) - f(x, y))\, dxdy.$$

Twierdzenie 3.4 (o zamianie zmiennych)**.** *Niech A, D będą podzbiorami $\mathbb{R}^m$ mierzalnymi w sensie Jordana. Niech $\varphi : A \to D$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas*

$$\int_D f(\bar{y})\, d\bar{y} = \int_A f(\varphi(\bar{x}))|J_\varphi(\bar{x})|\, d\bar{x}.$$

Uwaga. Odwzorowanie $\varphi : A \to D$ nazywamy zamianą zmiennych (współrzędnych), przypomnijmy, że $J_\varphi(\bar{x}) = \det \varphi'(\bar{x})$. W twierdzeniu możemy osłabić założenia, wystarczy założyć, że istnieje podzbiór $A_0 \subset A$ taki, że miara $A \setminus A_0$ jest zero oraz $\varphi : A_0 \to \varphi(A_0)$ jest dyfeomorfizmem.

Przykład (Współrzędne biegunowe). Każdy punkt (x, y) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (oprócz $(0, 0)$) można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$(x, y) = (r \cos t, r \sin t), \text{ gdzie } r > 0,\ t \in [0, 2\pi).$$

Wówczas r jest odległością punktu (x, y) od $(0, 0)$, zaś t jest kątem pomiędzy promieniem wodzącym a osią Ox. Mówimy wtedy, że (r, t) są współrzędnymi biegunowymi punktu (x, y), zaś odwzorowanie $\varphi : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\varphi(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$$

jest zamianą zmiennych. Rzeczywiście, jest bijekcją oraz jej jakobian wynosi

$$J_\varphi(r, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r > 0,$$

więc z twierdzenia o lokalnym odwracaniu odwzorowań φ na zbiorze $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ jest dyfeomorfizmem.

Dla dowolnego $R > 0$ oznaczmy

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}.$$

Obliczmy całkę $\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$. W tym celu skorzystamy z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe, tzn. wykorzystamy odwzorowanie $\varphi : A_R \to D_R$, gdzie $A_R = [0,R]\times[0,2\pi)$. Wtedy twierdzenie o zamianie zmiennych mówi, że

$$\begin{aligned}\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_{A_R} e^{-(r\cos t)^2-(r\sin t)^2}|J_\varphi(r,t)|\,drdt = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,drdt \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dt\right) dr = \int_0^R 2\pi e^{-r^2} rdr \\ &= [-\pi e^{-r^2}]_0^R = \pi(1-e^{-R^2}).\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to\infty}\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi.$$

Z drugiej strony z twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned}\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\,dx\right)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Przykład (współrzędne walcowe). Gdy bryła $D\subset\mathbb{R}^3$ jest częścią walca, to możemy zastosować współrzędne walcowe, które są połączeniem współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie Oxy ze współrzędną z, tzn.

$$\varphi(r,t,h) = (r\cos t, r\sin t, h).$$

Łatwo sprawdzić, że $J_\varphi = r$.

Przykład (współrzędne sferyczne). Gdy bryła jest częścią kuli $K_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$, to dla dowolnego punktu $(x,y,z)\in K_R$ mamy

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1,\ \text{ gdzie } r = \|(x,y,z)\|.$$

Ponieważ

$$\left(\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$$

więc istnieje kąt $\beta\in[-\pi/2,\pi/2]$ taki, że

$$\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \cos\beta,\quad \frac{z}{r} = \sin\beta.$$

Ponieważ

$$\left(\frac{x}{r\cos\beta}\right)^2 + \left(\frac{y}{r\cos\beta}\right)^2 = 1$$

więc istnieje kąt $\alpha\in[0,2\pi)$ taki, że

$$\frac{x}{r\cos\beta} = \cos\alpha,\quad \frac{y}{r\cos\beta} = \sin\alpha,$$

zatem

$$x = r\cos\alpha\cos\beta, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta, \quad z = r\sin\beta.$$

Wówczas r jest odległością od środka kuli, α jest długością geograficzną, a β szerokością geograficzną punktu (x, y, z). Niech

$$\varphi(r,\alpha,\beta) = (r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta),$$

wtedy

$$\begin{aligned} J_\varphi(r,\alpha,\beta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{vmatrix} = r^2\cos\beta. \end{aligned}$$

Wykorzystując współrzędne sferyczne obliczmy objętość kuli K_R. Ponieważ $K_R = \varphi([0,R]\times[0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2])$ oraz φ na zbiorze $(0,R)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ jest dyfeomorfizmem, więc

$$\begin{aligned} |K_R| = \int_{K_R} 1\,dxdydz &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\beta\,dr\,d\alpha\,d\beta = \\ = \int_0^R\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} r^2\cos\beta\,d\alpha\right)d\beta\right)dr &= \int_0^R\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi r^2\cos\beta\,d\beta\right)dr = \\ = \int_0^R\left[2\pi r^2\sin\beta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}dr &= \int_0^R 4\pi r^2\,dr = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem ograniczonym oraz $f : D \to \mathbb{R}^n$ funkcją ograniczoną. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, gdy jej wszystkie funkcje współrzędne $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ są całkowalne w sensie Riemanna. Wówczas całką funkcji $f : D \to \mathbb{R}^n$ nazywamy wektor

$$\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} = \left(\int_D f_1(\bar{x})\,d\bar{x}, \dots, \int_D f_n(\bar{x})\,d\bar{x}\right).$$

Twierdzenie 3.5. *Jeśli $f : D \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją całkowalną, to*

$$\|\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x}\| \leqslant \int_D \|f(\bar{x})\|d\bar{x}.$$

Dowód. Niech $\bar{v} = \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $\bar{v}$ jest wektorem zerowym, to nierówność jest oczywista. Załóżmy, że $\bar{v} \neq 0$. Wówczas z nierówności Schwartza dla dowolnego $\bar{x} \in D$ mamy

$$\left\langle \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}, f(\bar{x})\right\rangle \leqslant \left\|\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\right\| \|f(\bar{x})\| = \|f(\bar{x})\|.$$

Całkując tę nierówność stronami otrzymujemy

$$\|\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x}\| = \frac{\langle\bar{v},\bar{v}\rangle}{\|\bar{v}\|} = \left\langle\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}, \int_D f(\bar{x})\,d\bar{x}\right\rangle = \int_D\left\langle\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}, f(\bar{x})\right\rangle d\bar{x} \leqslant \int_D \|f(\bar{x})\|\,d\bar{x}.$$

□

4 Równania różniczkowe

4.1 Przykłady

Przykład. Do banku wkładamy w chwili t_0 pewien kapitał początkowy N_0. Bank oferuje nam oprocentowanie $k(t)$(w stosunku rocznym) - zmienne w czasie. Jaka będzie wartość wkładu w chwili t? Zależy to oczywiście od tego jak często bank kapitalizuje (dolicza odsetki) nasz wkład. Jeśli okres kapitalizacji wynosi h, to:

$$N(t+h) = N(t) + h \cdot k(t)N(t)$$

Co możemy powiedzieć na temat $N(t)$ jeśli kapitalizacja przebiega w sposób ciągły, czyli $h \to 0$?

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = k(t)N(t)$$

Przechodząc z $h \to 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = k \cdot N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

Przykład. (Rozwój populacji)
Niech $N(t)$ będzie wielkością populacji (np. ilość królików, bakterii itp.) na jakimś zamkniętym obszarze. Wiemy, że w chwili t_0 wielkość populacji wynosi N_0. Jakie prawa rządzą rozwojem populacji? Przyrost populacji $N'(t)$ jest proporcjonalny do jej wielkości, czyli

$$N'(t) = k(N(t)) \cdot N(t),$$

gdzie $k(N)$ jest współczynnikiem wzrostu populacji gdy jej wielkość wynosi N. Ponieważ ilość pokarmu jest stała, więc funkcja k jest malejąca. Dla uproszczenia możemy przyjąć $k(N) = a - b \cdot N$. Zatem dynamikę populacji opisuje równanie:

$$\begin{cases} N'(t) = (a - b \cdot N(t))N(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

Przykład. (Współistnienie gatunków)
Na danym terenie żyją dwa gatunki: drapieżniki i ofiary. Niech $x(t)$ oznacza liczbę drapieżników, $y(t)$ liczbę ofiar w chwili t.

$$\begin{cases} x'(t) = (b \cdot y(t) - a)x(t) \\ y'(t) = (e - d \cdot x(t))y(t) \end{cases}$$

(Równanie Volterry-Lotki)

Przykład. (Druga zasada dynamiki)
Obserwujemy ruch pewnej cząstki w $\mathbb{R}$. Wiemy że w chwili t_0 znajduje się w $x_0 \in \mathbb{R}$ i porusza się z prędkością $v_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że na cząstkę znajdującą się w $x \in \mathbb{R}$ i poruszającą się z prędkością $v \in \mathbb{R}$ w chwili t działa siła $F(t, x, v) \in \mathbb{R}$. Wówczas ruch cząstki $x(t) \in \mathbb{R}$ opisuje równanie Newtona:

$$\begin{aligned} m \cdot x''(t) &= F(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x'(t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

4.2 Co to jest równanie różniczkowe zwyczajne?

Definicja. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0, \tag{6}$$

przy czym szukaną funkcją jest funkcja $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$, która spełnia warunek (6), gdzie $F : [t_0, t_0 + \alpha] \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times ... \times \mathbb{R}^d}_{n+1} \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją przynajmniej ciągłą.

W trakcie wykładu będziemy rozpatrywać jedynie równania różniczkowe postaci

$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)), \tag{7}$$

gdzie $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times ... \times \mathbb{R}^d}_{n} \to \mathbb{R}^d$

Równanie (7) może posiadać wiele rozwiązań. Aby ograniczyć się do jednego rozwiązania równanie (7) rozważa się wraz z warunkami początkowymi postaci:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \tag{8}$$

Stwierdzenie 4.1. *Dowolne równanie postaci (7) można sprowadzić do równania pierwszego rzędu (czyli $n = 1$).*

Dowód. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x^{(n-1)}(t) \\ \overline{x}(t) &= (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^{d \cdot n}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) &= x''(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) &= x^{(n)}(t) = f(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = f(t, \overline{x}(t)). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x}(t)) \tag{9}$$

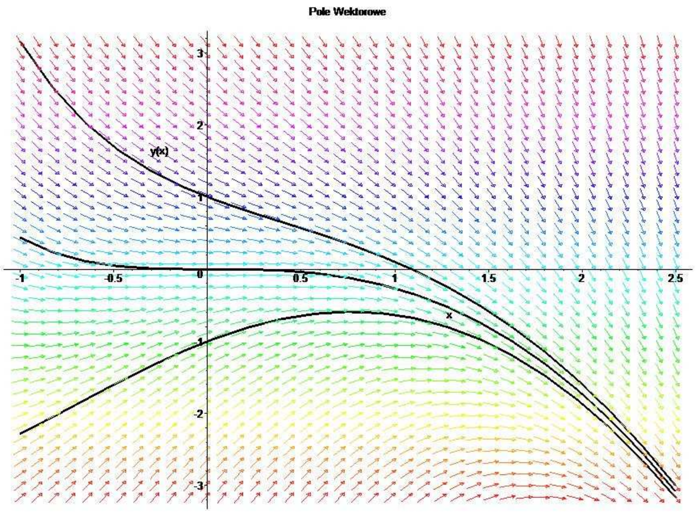
gdzie $\overline{f} : [t_0, t_0+\alpha] \times \mathbb{R}^{d \cdot n} \to \mathbb{R}^{d \cdot n}$, $\overline{f}_i(t, x) = x_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ oraz $\overline{f}_n(t, x) = f(t, x)$. Natomiast warunek początkowy wygląda następująco

$$\overline{x}(t_0) = (x_1(t_0), ..., x_n(t_0)) = (x(t_0), x'(t_0), ..., x^{(n-1)}(t_0)) = (x_0, ..., x_{n-1}).$$

Jeśli teraz rozwiążemy równanie (9) z powyższym warunkiem początkowym, to $y(t) = x_1(t)$ jest rozwiązaniem równania (7) z warunkiem początkowym (8). □

4.3 Interpretacja geometryczna

Rozważmy równanie różniczkowe postaci $x'(t) = f(x(t))$, gdzie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Równanie takiej postaci nazywamy autonomicznym (niezależnym od czasu t). Wówczas na funkcję $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ możemy patrzeć jak na pole wektorowe (pole wektorów prędkości). Rozwiązanie $x(t)$ możemy wówczas traktować jako opis ruchu cząstki w $\mathbb{R}^d$, którego wektor prędkości jest wyznaczony przez wektor pola f umieszczony w punkcie w którym znajduje się cząstka. Jeśli równanie różniczkowe jest postaci $x'(t) = f(t, x(t))$, określa się je



mianem nieautonomicznego (zależnego od czasu). W takim wypadku pole wektorowe f zmienia się w czasie, co należy uwzględnić w ruchu cząstki.

4.4 Równanie o rozdzielonych zmiennych

Definicja. Równanie postaci

$$x'(t) = h(t)g(x(t)), \tag{10}$$

gdzie $h : K \to \mathbb{R}$, $g : L \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi na pewnych odcinkach K i L nazywamy równaniem o rozdzielonych zmiennych.

Twierdzenie 4.2. *(Metoda rozdzielonych zmiennych)*
Niech $g(x) \neq 0$ dla $x \in L$. Oznaczmy przez H oraz G funkcje pierwotne odpowiednio funkcji h oraz $\frac{1}{g}$. Niech $u : K \to L$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas u jest rozwiązaniem równania (10) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\exists_{C \in \mathbb{R}} G(u(t)) = H(t) + C. \tag{11}$$

Dowód. $(\Rightarrow)$ Zauważmy, że jeśli $u'(t) = h(t)g(u(t))$ dla $t \in K$, to

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = h(t)$$
$$\Downarrow$$
$$G'(u(t))u'(t) = H'(t)$$
$$\Downarrow$$
$$(G \circ u)'(t) = H'(t)$$
$$\Downarrow$$
$$G(u(t)) = H(t) + C$$

($\Leftarrow$) wystarczy zróżniczkować. $\square$

Uwaga. Ponieważ $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$, więc G jest odwracalna, stąd

$$u(t) = G^{-1}(H(t) + C) \tag{12}$$

Przykład. Rozwiążmy równanie populacyjne postaci $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$. To równanie ma rozdzielone zmienne, przy czym $h(t) = 1$ oraz $g(x) = x(1-x)$. Zatem możemy wziąć $H(t) = t$ oraz $G(x) = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|$. Na mocy poprzedniego twierdzenia dowolne rozwiązanie $x(t)$ równania spełnia warunek

$$\ln\left|\frac{x(t)}{1-x(t)}\right| = t + c$$

dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\left|1 - \frac{1}{x(t)}\right| = e^{-c}e^{-t}.$$

Ponieważ funkcja $x(t)$ jest różniczkowalna, więc i $1-\frac{1}{x(t)}$ jest różniczkowalna, a stąd $1-\frac{1}{x(t)}$ jest równa $e^{-c}e^{-t}$ bądź $-e^{-c}e^{-t}$. Kładąc odpowiednio $c' = e^{-c}$ bądź $-e^{-c}$ otrzymujemy, że $1 - \frac{1}{x(t)} = c'e^{-t}$. Stąd

$$x(t) = \frac{1}{1 - c'e^{-t}} \text{ dla pewnego } c' \neq 0.$$

W praktyce pierwszą część rozumowania wykonuje się w następujący sposób. Najpierw przepisujemy pierwotne równanie w postaci

$$\frac{dx}{x(1-x)} = dt,$$

a następnie całkujemy to wyrażenie stronami

$$\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt = t + c.$$

4.5 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \to \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty) będzie funkcją ciągłą. Rozważmy problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{13}$$

Kiedy istnieje rozwiązanie problemu (13) i czy jest ono jedyne?

Uwaga. Załóżmy że $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to G \subset \mathbb{R}^d$ jest funkcją różniczkowalną spełniającą równanie (13). Wówczas x jest klasy C^1 oraz

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \tag{14}$$

czyli

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{15}$$

Odwrotnie, jeśli x jest funkcją ciągłą spełniającą (15), wówczas jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (13). Zatem problemy (13) i (15) są równoważne.

Definicja. Mówimy, że funkcja ciągła $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \to \mathbb{R}^d$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^d$, spełnia warunek Lipschitza ze względu na x ze stałą L, jeśli

$$\forall_{t\in[t_0,t_0+\alpha]}\forall_{x,y\in G}\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|. \tag{16}$$

Twierdzenie 4.3. *(Picarda o istnieniu lokalnych rozwiązań)*
Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b) \to \mathbb{R}^d$ ($K(x_0, b)$ jest kulą domkniętą o środku w x_0 i promieniu b) będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza dla x ze stałą L. Niech $\|f(t, x)\| \leqslant M$ dla $(t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja różniczkowalna

$$x : [t_0, t_0 + \beta] \to K(x_0, b),\ \textit{gdzie}\ \beta = \min(\alpha, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L})$$

taka, że $x(t_0) = x_0$ oraz $x'(t) = f(t, x(t))$ dla $x \in [t_0, t_0 + \beta]$.

Dowód. W dowodzie skorzystamy z Zasady Banacha dla przestrzenie metrycznej $X = C([t_0, t_0 + \beta], K(x_0, b))$ funkcji ciągłych działających z $[t_0, t_0 + \beta]$ do $K(x_0, b)$ z metryką

$$\rho(f, g) = \max_{t\in[t_0,t_0+\beta]} \|f(t) - g(t)\|.$$

Rozważmy też odwzorowanie $P : X \to X$, $P(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$. Odwzorownie to rzeczywiście ma warotości w X ponieważ

$$\begin{aligned}\|P(x)(t) - x_0\| &= \|\int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau\| \leqslant \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau))\|d\tau \\ &\leqslant \int_{t_0}^t M d\tau = M(t - t_0) \leqslant M\beta \leqslant b,\end{aligned}$$

a zatem $P(x) \in K(x_0, b)$.

Ponadto, $P : X \to X$ jest odwzorowaniem Lipschitza. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$\begin{aligned}\|P(x)(t) - P(y)(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau - (x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))d\tau)\| \\ &= \|\int_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))d\tau\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|d\tau \\ &\leqslant \int_{t_0}^t L\|x(\tau) - y(\tau)\|d\tau \leqslant \int_{t_0}^t L\rho(x, y)d\tau \\ &= L(t - t_0)\rho(x, y) \leqslant L\beta\rho(x, y).\end{aligned}$$

Zatem $\rho(P(x), P(y)) \leqslant L\beta\rho(x, y)$ oraz $L\beta \leqslant 1/2$, stąd P jest odwzorowaniem zwężającym. Z Zasady Banacha istnieje dokładnie jedna funkcja $x \in C([t_0, t_0 + \beta], K(x_0, b))$ taka, że $P(x) = x$, co równoważnie oznacza, że

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Z uwagi poprzedzającej twierdzenie funkcja ta jest różniczkowalna i jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego. □

Uwaga. Okazuje się, że warunek Lipschitza jest konieczny dla jednoznaczności rozwiązań. Rozważmy równanie, dla którego prawa strona nie jest funkcją Lipschitza

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Jednym z rozwiązań jest $x_1(t) = 0$. Ponadto

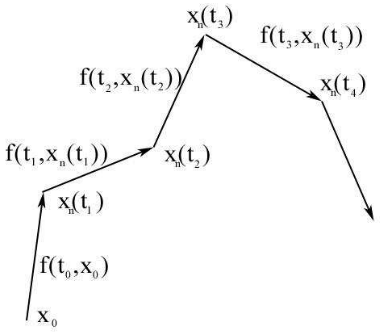
$$x_2(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ -t^2 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

jest również jego rozwiązaniem, ponieważ:

$$x_2'(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ -2t & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases} = 2\sqrt{|x_2(t)|}.$$

Twierdzenie 4.4. *(Peano, o istnieniu rozwiązań globalnych) Jeśli $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, wówczas dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^d$ istnieje funkcja $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$ klasy C^1 taka, że:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \ \text{dla} \ t \in [t_0, t_0 + \alpha] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{17}$$



Dowód opiera się na przybliżaniu rozwiązania tzw. łamanymi Eulera. Rozważmy ciąg podziałów Π_n odcinka $[t_0, t_0 + \alpha]$ postaci $\kappa_n = (t_0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n = t_0 + \alpha)$, którego średnica d_n dąży do zera. Wówczas n-tą łamaną Eulera konstruujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcll} x_n(t_0) & = & x_0 & \\ x_n(t) & = & x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) & \text{dla} \quad t \in [t_0, t_1] \\ x_n(t) & = & x_n(t_1) + f(t_1, x_n(t_1))(t - t_1) & \text{dla} \quad t \in [t_1, t_2] \\ & \vdots & & \\ x_n(t) & = & x_n(t_i) + f(t_i, x_n(t_i))(t - t_i) & \text{dla} \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{array}$$

W dalszej części dowodu pokazuje się, że jeśli $\{\kappa_n\}$ jest normalnym ciągiem podziałów, to ciąg funkcyjny $\{x_n\}$ posiada podciąg jednostajnie zbieżny. Wówczas granica tego ciągu $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą oraz spełnia równanie całkowe

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \ \text{dla} \ t \in [t_0, t_0 + \alpha],$$

co kończy dowód.

4.6 Schematy numeryczne

Rozważmy problem Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla } t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{18}$$

gdzie $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną i ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza ze względu na x. Chcemy to zagadnienie rozwiązać numerycznie na przedziale $[t_0, T]$. W tym celu dzielimy przedział na N równych części o długości $h = \frac{T-t_0}{N}$, za pomocą punktów $t_k = t_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, N$. W dalszym ciągu będziemy szukać przybliżonych rozwiązań w punktach t_k. Oznacza to, że szukamy ciągu $x_1, ..., x_N$ o tej własności, że możliwie dobrze przybliża on ciąg $x(t_0), ..., x(t_N)$. Przy dobrze dobranej metodzie oba ciągi powinny zbiegać do siebie, gdy $h \to 0$. Jak konstruować takie metody? W tym celu można odwołać się do wzoru Taylora. Załóżmy, że $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (18), wówczas

$$x(t + h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2) = x(t) + hf(t, x(t)) + O(h^2), \tag{19}$$

przy czym

$$\begin{aligned} A(h) &= O(h^p) \Leftrightarrow \exists_{c>0} |A(h)| \leqslant c|h^p| \\ A(h) &= o(h^p) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{A(h)}{h^p} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Zatem

$$x_{k+1} \approx x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + hf(t_k, x(t_k)) \approx x_k + hf(t_k, x_k), \tag{21}$$

co prowadzi do tzw. schematu Eulera

$$x_{k+1} = x_k + hf_k = x_k + hf(t_k, x_k). \tag{22}$$

Zatem znając warunek startowy x_0 i korzystając ze wzoru rekurencyjnego (22) możemy wyznaczyć cały ciąg $x_0, x_1, \ldots, x_N$.

Zamieniając miejscami t i $t + h$ we wzorze Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + h) - hx'(t + h) + O(h^2) = \\ &= x(t + h) - hf(t + h, x(t + h)) + O(h^2), \end{aligned} \tag{23}$$

co prowadzi do zamkniętego schematu Eulera postaci:

$$x_{k+1} = x_k + hf_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1}). \tag{24}$$

W pierwszym schemacie Eulera (22) w jawny sposób wyliczymy x_{k+1} znając x_k. Takie schematy nazywamy otwartymi. W zamkniętym schemacie Eulera (24) x_{k+1} jest przedstawiony w sposób uwikłany. Tego typu schematy nazywamy zamkniętymi i dają one znacznie lepsze rezultaty numeryczne niż podobne schematy otwarte.

Definicja. Schemat postaci

$$x_{i+1} = x_i + h\phi_f(h, t_i, x_i, x_{i+1}) \text{ dla } i = 0, ..., N-1, \tag{25}$$

gdzie ϕ_f jest funkcją zależną od f, nazywamy schematem jednokrokowym. Schemat taki jest otwarty, jeśli ϕ_f nie zależy od ostatniej współrzędnej.

Mając schemat oraz wartość x_0 możemy rekurencyjnie wyznaczyć ciąg $\{x_i\}$, który ma przybliżać rozwiązania $\{x(t_i)\}$.

Schematy Eulera są jednak mało dokładne. Aby otrzymać lepszy schemat trzeba skorzystać ze wzoru Taylora wyższego rzędu:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x''(t) &= \frac{d}{dt}f(t, x(t)) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))x'(t) \\ &= f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))f(t, x(t)), \end{aligned}$$

gdzie $f_x(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, $f_t(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$. Prowadzi to do schematu Taylora:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_k, x_k) + f_x(t_k, x_k)f(t_k, x_k)). \tag{26}$$

Definicja. Mówimy, że schemat (25) jest zbieżny, gdy dla dowolnego $t \in [t_0, T]$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli

1^o $t = t_0 + kh$, $k \to +\infty$, $h \to 0$,

2^o $x_0(h) \to x_0$, dla $h \to 0$,

to $x_k \to x(t)$, gdzie $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (18), natomiast $\{x_i\}$ jest ciągiem uzyskanym za pomocą schematu, gdy warunek startowy wynosi $x_0(h)$.

Definicja. Schemat (25) jest rzędu p, jeśli dla dowolnego rozwiązania $x \in C^p([t_0, T])$ zagadnienia (18) istnieje $C > 0$ takie, że

$$|r_k| \leqslant Ch^{p+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{27}$$

gdzie $x(t_k + h) = x(t_k) + h\phi_f(h, t_k, x(t_k), x(t_{k+1})) + r_k$ (r_k nazywany jest błędem lokalnym schematu), oraz powyższy warunek nie jest prawdziwy dla $p+2$.

Aby zbadać zbieżność schematu należy jednak oszacować tzw. globalny błąd schematu, czyli

$$e_k = x(t_k) - x_k. \tag{28}$$

Później przekonamy się, że prędkość zbieżności e_k do zera zależy od rzędu schematu.

Przykład. Wyznaczmy rząd otwartego schematu Eulera $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$. Wówczas

$$\begin{aligned} r_k &= x(t_k + h) - x(t_k) - hf(t_k, x(t_k)) \\ &= x(t_k) + hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k) + o(h^2) - x(t_k) - hx'(t_k) \\ &= \frac{h^2}{2}x''(t_k) + o(h^2), \end{aligned}$$

zatem jest to schemat 1-ego rzędu.

Przykład. Wyznaczmy rząd schematu $x_{k+1} = x_k + h(\alpha f_k + (1-\alpha) f_{k+1})$, gdzie $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wówczas

$$\begin{aligned}
r_k &= x(t_k + h) - x(t_k) - h\alpha f(t_k, x(t_k)) - h(1-\alpha) f(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \\
&= x(t_k + h) - x(t_k) - \alpha h x'(t_k) - (1-\alpha) h x'(t_k + h) \\
&= h x'(t_k) + \frac{h^2}{2} x''(t_k) + \frac{h^3}{6} x'''(t_k) + o(h^3) - \alpha h x'(t_k) \\
&\quad -(1-\alpha)\left(h x'(t_k) + h^2 x''(t_k) + \frac{h^3}{2} x'''(t_k) + o(h^3) \right) \\
&= h^2 \left(\frac{1}{2} - (1-\alpha) \right) x''(t_k) + h^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} \right) x'''(t_k) + o(h^3),
\end{aligned}$$

zatem rząd schematu jest $\geqslant 1$ oraz równy 2, jeśli $\alpha = \frac{1}{2}$ (schemat trapezów).

Ćwiczenie: Pokazać że schemat Taylora jest rzędu 2.

W dalszej części rozważań zajmiemy się tylko schematami otwartymi, lecz wszystkie twierdzenia prawdziwe będą również dla schematów zamkniętych.

Definicja. Schemat $x_{k+1} = x_k + h\phi_f(h, t_k, x_k)$ jest zgodny, jeśli

1^o funkcja ϕ_f jest ciągła,

2^o spełnia warunek Lipschitza

$$|\phi_f(h, t, x) - \phi_f(h, t, y)| \leqslant L|x - y|,$$

3^o $\phi_f(0, t, x) = f(t, x)$.

Ćwiczenie: Sprawdzić czy znane nam schematy są zgodne.

Twierdzenie 4.5. *Jeśli schemat jest zgodny, to jest zbieżny.*

Twierdzenie 4.6. *Jeśli schemat (25) jest rzędu p, zgodny oraz, jeśli rozwiązanie problemu Cauchy'ego (18) jest klasy $C^{p+1}([t_0, T])$, to*

$$|e_k| \leqslant O(|x_0(h) - x_0|) + O(h^p) \tag{29}$$

4.7 Równania zupełne

Definicja. Równaniem zupełnym nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

gdzie $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi takimi, że $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Uwaga. Jeśli spełniony jest warunek $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, to istnieje funkcja klasy C^1 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, dokładniej możemy wziąć

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(u, y)du + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, u)du$$

dla dowolnego wyboru $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie 4.7. *Funkcja różniczkowalna $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania zupełnego*

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $C \in \mathbb{R}$ takie, że $F(x, y(x)) = C$.

Dowód. Jeśli $P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) = 0$, to

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = \frac{d}{dx}F(x, y(x)).$$

Zatem funkcja $x \mapsto F(x, y(x))$ jest stała, więc istnieje stała C taka, że $F(x, y(x)) = C$. Dowód implikacji w przeciwnym kierunku jest taki sam. □

Przykład. Równianie

$$(4x^3 + 6xy^3) + (9x^2y^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 0$$

jest zupełne ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 18xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Wówczas

$$F(x,y) = \int_0^x (4u^3 + 6uy^3)du + \int_0^y (9 \cdot 0^2u^2 + 3)du = x^4 + 3xy^3 + 3y.$$

Zatem dowolne rozwiązanie równania jest postaci $x^4 + 3xy(x)^3 + 3y(x) = C$, a więc jest przedstawione w postaci uwikłanej.

4.8 Równania liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie liniowe jednorodnych rzędu k o stałych współczynnikach, tzn. równanie postaci

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_0x(t) = 0. \tag{30}$$

Z równaniem tym stowarzyszamy tzw. wielomian charakterystyczny $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_0$. Załóżmy, że λ_l ($1 \leqslant l \leqslant s$) są wszystkimi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu p z krotnościami ν_l oraz $\alpha_m \pm i\omega_m$ ($1 \leqslant m \leqslant r$) są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami o krotnościach μ_m. Wówczas $\sum_{l=1}^{s} \nu_l + 2\sum_{m=1}^{r} \mu_m = k$.

Twierdzenie 4.8. *Dowolne rozwiązanie równania (30) jest postaci*

$$x(t) = \sum_{l=1}^{s}\sum_{p=0}^{\nu_l-1} a_{l,p}t^pe^{\lambda_l t} + \sum_{m=1}^{r}\sum_{p=0}^{\mu_l-1}(b_{m,q}t^qe^{\alpha_m t}\cos(\omega_m t) + c_{m,q}t^qe^{\alpha_m t}\sin(\omega_m t)).$$

Przykład. Rozwiążmy równanie

$$x''' - 3x'' + 9x' + 13x = 0.$$

Wówczas wielomian charakterystyczny jest postaci

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = (\lambda+1)(\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i)).$$

Zatem dowolne rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \cos(3t) + c_3 e^{2t} \sin(3t).$$

Jeśli rozważymy problem Cauchy'ego

$$x''' - 3x'' + 9x' + 13x = 0,\ x(0) = 5, x'(0) = 7, x''(0) = -1,$$

to c_1, c_2, c_3 muszą spełniać

$$\begin{aligned}
5 = x(0) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \cos(3t) + c_3 e^{2t} \sin(3t)|_{t=0} = c_1 + c_2 \\
7 = x'(0) &= -c_1 e^{-t} + (2c_2 + 3c_3) e^{2t} \cos(3t) + (2c_3 - 3c_2) e^{2t} \sin(3t)|_{t=0} \\
&= -c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\
-1 = x''(0) &= c_1 e^{-t} + (-5c_2 + 12c_3) e^{2t} \cos(3t) + (-5c_3 - 12c_2) e^{2t} \sin(3t)|_{t=0} \\
&= c_1 - 5c_2 + 12c_3.
\end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań liniowych

$$\begin{aligned}
5 &= c_1 + c_2 \\
7 &= -c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\
-1 &= c_1 - 5c_2 + 12c_3
\end{aligned}$$

otrzymamy $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, a więc rozwiązaniem problemu Cauchy'ego jest funkcja

$$x(t) = 2e^{-t} + 3e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \sin(3t).$$