Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wydział Matematyki i Informatyki

Krzysztof Frączek

Analiza Matematyczna I

Wykład dla studentów I roku
kierunku informatyka

Toruń 2016

Spis treści

1 Liczby rzeczywiste **1**

2 Ciągi liczbowe **9**

3 Szeregi liczbowe **25**
3.1 Szeregi o wyrazach nieujemnych . . . 27

4 Dowolne szeregi rzeczywiste c.d. **31**
4.1 Iloczyn szeregów . . . 35

5 Granica funkcji **37**

6 Ciągłość funkcji **42**

7 Pochodna funkcji **48**
7.1 Wzór Taylora . . . 60
7.2 Przybliżone rozwiązywanie równań . . . 67

8 Całka nieoznaczona **68**
8.1 Całkowanie funkcji wymiernych . . . 72
8.2 Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych . . . 73

9 Całka Riemanna **75**
9.1 Zastosowania geometryczne całki Riemanna . . . 85
9.2 Całki niewłaściwe . . . 89

10 Ciągi i szeregi funkcyjne **93**
10.1 Szeregi funkcyjne . . . 95
10.2 Różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych . . . 99
10.3 Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych . . . 102

11 Przybliżone metody całkowania **104**

1 Liczby rzeczywiste

Rozważmy następującą sytuację: niech $(X, +, \cdot, \leqslant)$, gdzie X jest zbiorem co najmniej dwuelementowym, $+, \cdot : X \times X \to X$ oraz $\leqslant \subset X \times X$ jest relacją, którą dla uproszczenia będziemy zapisywać następująco: $x \leqslant y \Leftrightarrow (x, y) \in \leqslant$. Ponadto, spełnione są następujące aksjomaty liczb rzeczywistych:

1. Aksjomaty ciała przemiennego:
   (a) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$ – łączność;
   (b) $\forall_{x,y \in X} \;\; x + y = y + x$ – przemienność dodawania;
   (c) $\exists_{0 \in X} \forall_{x \in X} \;\; 0 + x = x + 0 = x$ – element neutralny dodawania;
   (d) $\forall_{x \in X} \exists_{\widetilde{x} \in X} \;\; x + \widetilde{x} = 0$ – element przeciwny;
   (e) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ – łączność;
   (f) $\forall_{x,y \in X} \;\; x \cdot y = y \cdot x$ – przemienność mnożenia;
   (g) $\exists_{1 \in X, 1 \neq 0} \forall_{x \in X} \;\; 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ – element neutralny mnożenia;
   (h) $\forall_{x \in X, x \neq 0} \exists_{\widehat{x} \in X} \;\; x \cdot \widehat{x} = 1$ – element odwrotny;
   (i) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania.
2. Aksjomaty porządku liniowego:
   (a) $\forall_{x \in X} \;\; x \leqslant x$ – zwrotność;
   (b) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$ – przechodniość;
   (c) $\forall_{x,y \in X} \;\; x \leqslant y \vee y \leqslant x$ – spójność;
   (d) $\forall_{x,y \in X} \;\; x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Longrightarrow x = y$ – antysymetria.
3. Aksjomaty dotyczące zarówno działań i relacji porządku:
   (a) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$;
   (b) $\forall_{x,y \in X} \;\; 0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant x \cdot y$.
4. Aksjomat ciągłości: dla dowolnych niepustych podzbiorów $A, B \subset X$, jeśli $A \leqslant B$ (tzn. $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} \; a \leqslant b$), to istnieje $x \in X$ taki, że $A \leqslant x \leqslant B$ (tzn. $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} \; a \leqslant x \leqslant b$).

Uwaga 1. Zauważmy, że element neutralny dodawania jest też tylko jeden. Jeśli $0'$ jest innym elementem neutralnym, to

$$0 = 0 + 0' = 0.'$$

Uwaga 2. Niech $x \in X$. Wówczas isnieje $y \in X$ taki, że $x + y = 0$. Zauważmy, że taki, element jest tylko jeden. Rzeczywiści załóżmy, że $x + y' = 0$. Wówczas

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

Ten jedyny element przeciwny do x będziemy oznaczać $-x$. Podobnie jeśli $x \neq 0$ istnieje jedyny element, który będziemy oznaczać przez x^{-1} lub $\frac{1}{x}$, taki, że $x \cdot x^{-1} = 1$. Wykorzystując te oznaczenia definiujemy nowe działania w zbiorze X: odejmowanie i dzielenie. Różnicą dwóch liczb $x, y \in X$ nazywamy liczbę

$$x - y = x + (-y).$$

Jeśli $y \neq 0$, to ilorazem x i y nazywamy liczbę

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Definicja. Niepusty podzbiór $A \subset X$ nazywa się

- *ograniczonym z góry*, gdy $\exists_{M \in X} \forall_{x \in A} x \leqslant M$. Liczba M jest wówczas nazywana ograniczeniem górnym zbioru A.
- *ograniczonym z dołu*, gdy $\exists_{m \in X} \forall_{x \in A} m \leqslant x$. Liczba m jest wówczas nazywana ograniczeniem dolnym zbioru A.
- *ograniczonym*, gdy $\exists_{m,M \in X} \forall_{a \in A} m \leqslant x \leqslant M$.

Uwaga 3. Będziemy stosować następującą notację

$$x < y \iff x \leqslant y \wedge x \neq y$$

oraz

$$x \geqslant y \iff y \leqslant x.$$

Definicja. Dla dowolnego niepustego podzbioru $A \subset X$ definiujemy jego *kres górny (supremum)*, dalej oznaczany przez $\sup A$ oraz *kres dolny (infimum)*, dalej oznaczany przez $\inf A$ w sposób następujący:

- Jeśli A nie jest ograniczony z góry, to $\sup A = +\infty$. Jeśli A jest ograniczony z góry, to

$$M = \sup A, \quad \text{jeśli} \quad \forall_{x \in A} x \leqslant M \ \wedge \ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} M - \varepsilon < a \leqslant M.$$

- Jeśli A nie jest ograniczony z dołu, to $\inf A = -\infty$. Jeśli A jest ograniczony z dołu, to

$$M = \inf A, \quad \text{jeśli} \quad \forall_{x \in A} m \leqslant x \ \wedge \ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} m \leqslant a < m + \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.1. *Niech $A \subset X$ będzie zbiorem niepustym. Jeśli A jest ograniczony z góry, to istnieje $M \in X$ taki, że $M = \sup A$. Jeśli A jest ograniczony z dołu, to istnieje $m \in X$ taki, że $m = \sup A$.*

Dowód. Załóżmy, że $A \neq \emptyset$ i jest ograniczony z góry. Niech

$$B = \{x \in X : A \leqslant x\} \quad \text{(zbiór wszystkich ograniczeń górnych dla } A).$$

Wtedy $B \neq \emptyset$ oraz $A \leqslant B$. Z aksjomatu ciągłości wynika, że istnieje $M \in X$ taki, że

$$A \leqslant M \leqslant B.$$

Pokażemy, że $M = \sup A$. Po pierwsze $a \leqslant M$ dla wszystkich $a \in A$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Gdyby dla każdego $a \in A$ było $a \leqslant M - \varepsilon$, to mielibyśmy $M - \varepsilon \in B$. Ponieważ $M \leqslant B$, więc $M \leqslant M - \varepsilon$, a stąd $0 \leqslant -\varepsilon$, zatem sprzeczność. Wynika stąd, że istnieje $a \in A$ takie, że $M - \varepsilon < a$, co dowodzi, że $M = \sup A$.

Dowód drugiej części twierdzenia jest analogiczny. □

Definicja. Dowolny zbiór X wraz z działaniami $+, \cdot : X \times X \to X$ oraz relacją $\leqslant \subset X \times X$ spełniający aksjomaty liczb rzeczywistych nazywamy *zbiorem liczb rzeczywistych.*

Oczywiście istnieje wiele tego typu zbiorów, ale w pewnym sensie są one „takie same”, tzn. izomorficzne.

Twierdzenie 1.2. *Załóżmy, że $(X, +, \cdot, \leqslant)$ oraz $(\widetilde{X}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leqslant})$ spełniają aksjomaty liczb rzeczywistych. Wówczas istnieje bijekcja $f : X \to \widetilde{X}$ taka, że*

$$\forall_{x,y \in X} \;\; f(x + y) = f(x) \tilde{+} f(y),$$

$$\forall_{x,y \in X} \;\; f(x \cdot y) = f(x) \tilde{\cdot} f(y),$$

$$\forall_{x,y \in X} \;\; x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \tilde{\leqslant} f(y)$$

oraz jeśli $A \subset X$ jest zbiorem ograniczonym z góry, to $f(A) \subset \widetilde{X}$ jest ograniczony z góry oraz

$$\sup f(A) = f(\sup A).$$

Ponieważ zbiór liczb rzeczywistych jest opisany jednoznacznie, możemy więc stosować literę $\mathbb{R}$ jako oznaczenie zbioru liczb rzeczywistych. Odpowiedź na pytanie, czy istnieje zbiór $\mathbb{R}$ spełniający aksjomaty liczb rzeczywistych wymaga skonstruowania takiego zbioru. Takie konstrukcje pochodzą od Cantora i Dedekinda, a ich podstawą jest aksjomatycznie wprowadzony zbiór liczb naturalnych.

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. Mówimy, że $x \in A$ jest elementem *największym* zbioru A jeśli
$$\forall_{a \in A}\ a \leqslant x.$$
Mówimy, że $y \in A$ jest elementem *najmniejszym* zbioru A jeśli
$$\forall_{a \in A}\ y \leqslant a.$$

Ćwiczenie. Jeśli x jest elementem największym (najmniejszym) zbioru A, to $x = \sup A$ ($x = \inf A$).

Ćwiczenie. Jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest niepustym zbiorem ograniczonym z góry, to $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A. Jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest niepustym zbiorem ograniczonym z dołu, to $M = \inf A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A.

Definicja. Zbiorem liczb naturalnych będziemy nazywać najmniejszy podzbiór liczb rzeczywistych zawierający 1 oraz posiadający tę własność, że jeśli zawiera pewna liczbę n, to zawiera również $n+1$. Zbiór liczb naturalnych będziemy oznaczać przez $\mathbb{N}$.

Lemat 1.3. *(Zasada indukcji matematycznej). Niech $A \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem takim, że $1 \in A$ oraz $n \in A$ implikuje $n+1 \in A$. Wówczas $A = \mathbb{N}$.*

Dowód. Ponieważ $\mathbb{N}$ jest najmniejszym podzbiorem $\mathbb{R}$ spełniającym powyższe własności, więc $\mathbb{N} \subset A$. Ponadto $A \subset \mathbb{N}$, a stąd $A = \mathbb{N}$. $\square$

Lemat 1.4. *(nierówność Bernoulliego). Dla dowolnej liczby naturalnej $\alpha > -1$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność*
$$1 + n\alpha \leqslant (1+\alpha)^n.$$

Dowód. Ustalmy $\alpha > -1$ oraz oznaczmy przez A podzbiór liczb naturalnych n, dla których $1 + n\alpha \leqslant (1+\alpha)^n$. Oczywiście $1 \in A$, ponieważ $1 + 1\alpha = (1+\alpha)^1$. Załóżmy, że $n \in A$. Wtedy $1 + n\alpha \leqslant (1+\alpha)^n$. Stąd
$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &= (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 = \\ &= 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha,\end{aligned}$$
zatem $n+1 \in A$. Na mocy zasady indukcji matematycznej mamy $A = \mathbb{N}$, tzn. nierówność Bernoulliego zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeśli $0 \leqslant a < b$, to $a^n < b^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

Ćwiczenie. Pokazać, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k},$$

gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ dla $k \geqslant 1$.

Lemat 1.5. *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ taka, że $x \leqslant n$.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że $n < x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Stąd zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Niech $y = \sup \mathbb{N}$. Zatem istnieje $n \in \mathbb{N}$ taka, że $y - 1 < n \leqslant y$. Zatem $y < n + 1$, co stoi w sprzeczności z faktem, że y jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathbb{N}$. □

Przykład. Niech $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ $0 < 1/n \leqslant 1$, więc jest to zbiór ograniczony. Ponadto $1 \in A$, więc jest elementem największym, a zatem $\sup A = 1$. Ponadto, $\inf A = 0$, ponieważ $1/n > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$, z poprzedniego lematu, istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $1/\varepsilon < n$. Wówczas $A \ni 1/n < \varepsilon$.

Lemat 1.6. *(zasada minimum). W każdym niepustym podzbiorze zbioru liczb naturalnych istnieje element najmniejszy.*

Dowód. Przypuśćmy, że $B \subset \mathbb{N}$ niepustym podzbiorem, który nie posiada elementu najmniejszego. Niech

$$A := \{n \in \mathbb{N} : n < B\}.$$

Wówczas $1 \in A$, w przeciwnym przypadku 1 byłaby elementem najmniejszym w B. Załóżmy, że $k \in A$. Gdyby $k + 1 \notin A$, to istniałaby liczba $m \in B$ taka, że $m \leqslant k + 1$. Niech b będzie dowolnym elementem z B. Wówczas $k < b$, a co za tym idzie $m \leqslant k + 1 \leqslant b$. Zatem m jest elementem najmniejszym w B. Stąd $k + 1 \in A$. Na mocy zasady indukcji matematycznej mamy $A = \mathbb{N}$, a stąd $\mathbb{N} < B$, co przeczy lematowi 1.5. □

Definicja. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ definiujemy następująco:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ definiujemy następująco:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jeśli liczba należy do zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to nazywamy ją niewymierną.

Twierdzenie 1.7. *(zasada Archimedesa). Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje $n \in \mathbb{Z}$ taka, że $n \leqslant x < n+1$.*

Dowód. Niech $x \in \mathbb{R}$. Na mocy lematu 1.5 istnieje liczba całkowita m takie, że $x+1 < m$. Niech

$$B = \{n \in \mathbb{N} : m \leqslant x+n\}.$$

Zbiór B jest niepusty na postawie lematu 1.5. Niech p będzie elementem najmniejszym zbioru B. Wówczas

$$m \leqslant x+p \quad \text{oraz} \quad m > x+p-1,$$

stąd

$$m-p \leqslant x < m-p+1.$$

□

Oznaczenia. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ liczbę całkowitą n spełniającą $n \leqslant x < n+1$ nazywamy *częścią całkowitą* liczby x oraz oznaczmy symbolem $[x]$. Liczbę $\{x\} = x - [x]$ nazywamy *częścią ułamkową* liczby x. Wówczas $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Twierdzenie 1.8. *(o gęstości zbioru liczb wymiernych w $\mathbb{R}$.) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ istnieje liczba wymierna q taka, że $x < q < y$.*

Dowód. Na mocy lematu 1.5 istnieje liczba naturalna n taka, że

$$\frac{1}{y-x} < n \Longrightarrow y-x > \frac{1}{n}.$$

Niech $m = [nx]+1$. Wtedy

$$m-1 \leqslant xn < m.$$

Stąd

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}.$$

Zatem

$$x < \frac{m}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

□

Oznaczenia.

$$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}, \quad -A = \{-a : a \in A\}.$$

Twierdzenie 1.9. *Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami niepustymi. Wówczas*

(i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

(ii) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$;

(iii) $\sup(-A) = -\inf A$.

(iv) *jeśli* $A \leqslant B$, *to* $\sup A \leqslant \inf B$.

Dowód. (i). Jeśli któryś ze zbiorów A lub B nie jest ograniczony z góry, to również $A+B$ nie jest ograniczony z góry, a wtedy spełniony jest warunek (i). Załóżmy, że oba zbiory są ograniczone z góry oraz oznaczmy $\alpha = \sup A$ oraz $\beta = \sup B$. Wówczas dla dowolnych $a \in A$ oraz $b \in B$ mamy $a \leqslant \alpha$ oraz $b \leqslant \beta$, zatem $a + b \leqslant \alpha + \beta$. Stąd dla dowolnego $c \in A + B$ mamy $c \leqslant \alpha + \beta$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji istnieją liczby $x \in A$ oraz $y \in B$ takie, że

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x \leqslant \alpha \quad \text{oraz } \beta - \frac{\varepsilon}{2} < y \leqslant \beta.$$

Wówczas

$$\alpha + \beta - \varepsilon < x + y \leqslant \alpha + \beta.$$

Ponieważ $x + y \in A + B$, więc $\sup(A+B) = \alpha + \beta$.

Dowód (ii) jest analogiczny.

(iii). Niech $\alpha = \inf A$. Jeśli $b \in -A$, to istnieje $a \in A$ takie, że $b = -a$. Ponieważ $\alpha \leqslant a$, więc $b = -a \leqslant -\alpha$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $x \in A$ takie, że $\alpha \leqslant x < \alpha + \varepsilon$. Stąd $-\alpha - \varepsilon < -x \leqslant -\alpha$. Ponieważ $-x \in -A$, więc $-\alpha = \sup(-A)$.

(iv). Niech $\alpha = \sup A$ oraz $\beta = \inf B$. Przypuśćmy, że $\alpha > \beta$. Weźmy $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2 > 0$. Wówczas istnieją $a \in A$ oraz $b \in B$ takie, że $\alpha - \varepsilon < a$ oraz $b < \beta + \varepsilon$. Stąd

$$b < \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} < a,$$

co przeczy założeniu $A \leqslant B$. □

Twierdzenie 1.10. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej* $\alpha > 0$ *i dowolnej* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista* $\beta > 0$ *taka, że* $\beta^n = \alpha$.

Dowód. Niech $A = \{0 \leqslant x : x^n \leqslant \alpha\}$ oraz $B = \{0 \leqslant x : \alpha \leqslant x^n\}$. Wówczas $A \neq \emptyset$, ponieważ $0 \in A$ oraz $B \neq \emptyset$ ponieważ

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha > \alpha.$$

Stąd również

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n > \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} \in A.$$

Zauważmy, że $A \leqslant B$. Weźmy dowolne $a \in A$ oraz $b \in B$. Gdyby $b < a$, to $\alpha \leqslant b^n < a^n \leqslant \alpha$, i sprzeczność.

Ponieważ $A \leqslant B$, więc $x = \sup A \leqslant y = \inf B$. Udowodnimy, że $x = y$. Gdyby $x < y$, to jeśli $x < z < y$, to $z^n > \alpha$ (w przeciwnym razie $z \in A$) oraz $z^n < \alpha$ (w przeciwnym razie $z \in B$), co prowadzi do sprzeczności. Stąd

$$\beta := y = x = \sup A = \inf B.$$

Ponieważ $0 < \frac{\alpha}{1+\alpha} \in A$, więc $\beta > 0$. Udowodnimy, że $\beta^n = \alpha$. Przypuśćmy, że $\beta^n < \alpha$. Wówczas $\beta \in A$ oraz $\beta \notin B$. Weźmy

$$\varepsilon = \min((\alpha - \beta^n)/(n(2\beta)^{n-1}), \beta).$$

Wówczas istnieje $b \in B$ takie, że $\beta + \varepsilon > b$. Wtedy $b < 2\beta$. Ponadto

$$\begin{aligned} b^n &= b^n + \beta^n - \beta^n = b^n + \beta^n - b^n \left(\frac{\beta - b}{b} + 1\right)^n \leqslant \\ &\leqslant b^n + \beta^n - b^n \left[\left(\frac{\beta - b}{b}\right) n + 1\right] = \beta^n + (b - \beta) b^{n-1} n < \\ &< \varepsilon (2\beta)^{n-1} n + \beta^n \leqslant (\alpha - \beta^n) + \beta^n = \alpha, \end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności z faktem, że $b \in B$. W podobny sposób można wyeliminować przypadek $\alpha < \beta^n$. Zatem $\beta^n = \alpha$.

Udowodnimy teraz, że β jest jedną liczbą rzeczywistą dodatnią, której n–ta potęga jest równa α. Przypuśćmy, że $c > 0$ oraz $c^n = \alpha$. Wówczas $c \in A \cap B$. Ponieważ $\beta = \sup A$, więc $c \leqslant \beta$ oraz ponieważ $\beta = \inf B$, więc $c \leqslant \beta$. Stąd $c = \beta$. □

Definicja. Jeśli $\alpha > 0$, to jedyną liczbą dodatnią rzeczywistą β taką, że $\beta^n = \alpha$ nazywamy *pierwiastkiem n–tego stopnia* z α i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{\alpha}$. Przyjmujemy również, że $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ćwiczenie. Pokazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ istnieje liczba niewymierna r taka, że $x < r < y$.

Definicja. Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad 0 \leqslant a \\ -a & \text{gdy} \quad a < 0. \end{cases}$$

Lemat 1.11. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant b$ mamy*

(i) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(ii) $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$;

(iii) $b \leqslant |a| \iff a \leqslant -b \vee b \leqslant a$.

Lemat 1.12. *(nierówność trójkąta). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Dowód. Z lematu 1.11 (i) mamy $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ oraz $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Dodając obie nierówności stronami otrzymujemy $-(|a+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$. Z lematu 1.11 (ii) wynika, że $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. □

Lemat 1.13. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność*

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

Dowód. Z nierówności trójkąta mamy

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|$$

oraz

$$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a| + |a| = |a-b| + |a|.$$

Stąd

$$-|a-b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a-b|,$$

a co za tym idzie $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$. □

2 Ciągi liczbowe

Definicja. Ciągiem liczbowym będziemy nazywać dowolną funkcję $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Najczęściej zamiast $x(n)$ będziemy pisać x_n, a cały ciąg będziemy oznaczać przez $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Przykład.

1. $x_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$;
2. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$; $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$;
3. $x_1 = x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$; $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ – ciąg Fibonacciego;
4. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \ldots$ – ciąg zawierający wszystkie dodatnie liczby wymierne. Ciąg ten powstaje w ten sposób, że w miejscach od $\frac{n(n-1)}{2}+1$ do $\frac{n(n+1)}{2}$ wpisujemy kolejno liczby $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}$.

Definicja. Ciąg liczbowy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem

- *rosnący*, jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} > x_n$;
- *malejącym*, jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} < x_n$;

- *nierosnący*, jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} \leqslant x_n$;
- *niemalejącym*, jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} \geqslant x_n$;
- *monotonicznym*, jeśli spełniony jest jeden z powyższych warunków.

Pierwsze dwa rodzaje ciągów to ciągi *ściśle monotoniczne*.

Definicja. Ciąg liczbowy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem

- *ograniczonym z góry*, jeśli $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \leqslant M$;
- *ograniczonym z dołu*, jeśli $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ m \leqslant x_n$;
- *ograniczonym*, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Uwaga 4. Wprost z definicji otrzymujemy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |x_n| \leqslant M$.

Definicja. Niech dany będzie ciąg liczbowy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dla dowolnego rosnącego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wartościach naturalnych, ciąg $n \mapsto x_{k_n}$ nazywamy *podciągiem* ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i oznaczamy $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niech będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas

- *prawie wszystkie* wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ należą do A, gdy
$$\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant k}\ x_n \in A;$$
- *nieskończenie wiele* wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ należą do A, gdy
$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\exists_{n\geqslant k}\ x_n \in A.$$

Uwaga 5. Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ należą do A, to nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ należą do A.

Definicja. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny* do liczby $x \in \mathbb{R}$, symbolicznie
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{lub } x_n \longrightarrow x,$$
jeśli
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Inaczej, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do liczby $x \in \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, prawie wszystkie wyrazy tego ciągu należą do przedziału $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Przykład. 1. Każdy ciąg stały, albo od pewnego miejsca stały jest zbieżny.

2. $\frac{1}{n} \to 0$. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Niech $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Wtedy $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$, co implikuje $\varepsilon > \frac{1}{n_0}$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Lemat 2.1. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest również zbieżny do tej samej granicy.*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to x$. Weźmy dowolny podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tego ciągu. Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $N \in \mathbb{N}$ taka, że $|x_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Ponieważ ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $k_{n_0} \geqslant N$. Wówczas jeśli $n \geqslant n_0$, to $k_n \geqslant k_{n_0} \geqslant N$, a stąd $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$, co dowodzi, że $x_{k_n} \to x$. □

Lemat 2.2. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to x$. Weźmy $\varepsilon = 1$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < 1$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd $x - 1 < x_n < x + 1$ dla $n \geqslant n_0$. Niech M będzie największą z liczb $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |x| + 1$. Wtedy dla każdego $n \leqslant n_0$ mamy $|x_n| \leqslant M$. Jeśli $n \geqslant n_0$, to

$$-M \leqslant -|x| - 1 \leqslant x - 1 < x_n < x + 1 \leqslant |x| + 1 \leqslant M.$$

□

Definicja. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{m,n\geqslant n_0} \; |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ciągi spełniające warunek Cauchy'ego nazywane są również ciągami Cauchy'ego, lub ciągami podstawowymi lub ciągami fundamentalnymi.

Lemat 2.3. *Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to x$. Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \varepsilon/2$ dla $n \geqslant n_0$. Weźmy dowolne $m, n \geqslant n_0$. Wtedy z nierówności trójkąta mamy

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| \leqslant |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 2.4. *(o trzech ciągach) Jeśli $a_n \to x$, $c_n \to x$ oraz $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to $b_n \to x$.*

Dowód. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_1$ oraz $|c_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_2$. Niech $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$-\varepsilon < a_n - x \leqslant b_n - x \leqslant c_n - x < \varepsilon.$$

Stąd $|b_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. □

Uwaga 6. $x_n \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x_n| \to 0$.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$. Wtedy*

1. *$ax_n \to ax$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a;*
2. *$x_n + y_n \to x + y$;*
3. *$x_n y_n \to xy$;*
4. *$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$, gdy $y \neq 0$;*
5. *$|x_n| \to |x|$;*
6. *jeśli $x_n \leqslant y_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $x \leqslant y$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$.

Ad 1. Jeśli $a = 0$, to teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że $a \neq 0$. Ponieważ $x_n \to x$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \varepsilon/|a|$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$|ax_n - ax| = |a||x_n - x| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

Ad 2. Z założenia istnieją $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \varepsilon/2$ dla $n \geqslant n_1$ oraz $|y_n - y| < \varepsilon/2$ dla $n \geqslant n_2$. Niech $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ad 3. Ponieważ ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc istnieje liczba $M > 0$ taka, że $|x_n| \leqslant M$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$. Z założenia istnieją $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{M+|y|}$ dla $n \geqslant n_1$ oraz $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{M+|y|}$ dla $n \geqslant n_2$. Niech $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leqslant \\ &\leqslant |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M\frac{\varepsilon}{M + |y|} + |y|\frac{\varepsilon}{M + |y|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ad 4. Ze względu na 3. wystarczy udowodnić, że $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$. Z założenia istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|y_n - y| < \min\left(\frac{|y|}{2}, \frac{|y|^2\varepsilon}{2}\right)$$

dla $n \geqslant n_0$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$|y_n| = |y - (y - y_n)| \geqslant |y| - |y - y_n| \geqslant |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}$$

oraz

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n||y|} \leqslant \frac{|y - y_n|}{|y|^2/2} < \frac{|y|^2\varepsilon}{2} \bigg/ \frac{|y|^2}{2} = \varepsilon.$$

Ad 5. Wystarczy skorzystać z faktu, że $||x_n| - |x|| \leqslant |x_n - x|$.

Ad 6. Przypuśćmy, że $x > y$. Weźmy $\varepsilon = (x-y)/2 > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \varepsilon$ oraz $|y_n - y| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned} y_n &\leqslant |y_n - y| + y < y + \varepsilon = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} = \\ &= x - \frac{x-y}{2} = x - \varepsilon < x - |x_n - x| \leqslant x_n. \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.6. *Jeśli $x_n \to 0$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, to $x_n y_n \to 0$.*

Dowód. Ponieważ $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc istnieje $M \geqslant 0$ takie, że $|y_n| \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$0 \leqslant |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leqslant |x_n|M.$$

Ponieważ $M|x_n| \to 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $|x_n y_n| \to 0$, a stąd $x_n y_n \to 0$. □

Twierdzenie 2.7. *Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący i ograniczony. W przypadku, gdy ciąg jest nierosnący dowód przebiega analogicznie. Niech $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ zbiór A jest ograniczony, więc istnieje $x = \sup A$. Udowodnimy, że $x_n \to x$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego istnieje n_0 takie, że

$$x - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Wówczas dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant x < x + \varepsilon,$$

a zatem $|x_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. □

Twierdzenie 2.8. *(Bolzano–Weierstrassa) Jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, posiada podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny.*

Dowód. Niech $M > 0$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że $|x_n| \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$\begin{aligned} A &= \{a \in \mathbb{R} : a \leqslant x_n \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{a \in \mathbb{R} : \forall_{k\in\mathbb{N}}\exists_{n\geqslant k}\, a \leqslant x_n\}. \end{aligned}$$

Wówczas $-M \in A$ oraz $A < M + 1$. Niech $x = \sup A$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $a \in A$ takie, że $x - \varepsilon < a \leqslant x$. Zatem $x - \varepsilon < x_n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $x + \varepsilon \notin A$, więc $x + \varepsilon \leqslant x_n$ tylko dla skończonej liczby $n \in \mathbb{N}$. Stąd $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\exists_{n\geqslant k}\, |x_n - x| < \varepsilon.$$

Korzystając z tego faktu dla $\varepsilon = 1$ otrzymujemy, że istnieje $k_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_{k_1} - x| < 1$. Następnie znajdziemy $k_2 > k_1$ takie, że $|x_{k_2} - x| < 1/2$. Postępując w sposób indukcyjny dla dowolnej liczby naturalnej n znajdziemy $k_n > k_{n-1}$ takie, że $|x_{k_n} - x| < 1/n$. Ponieważ

$$0 \leqslant |x_{k_n} - x| < \frac{1}{n} \to 0,$$

z twierdzenia o trzech ciągach otrzymamy, że $|x_{k_n} - x| \to 0$, zatem $x_{k_n} \to x$. □

Twierdzenie 2.9. *(Cauchy'ego) Ciąg liczbowy jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód. Fakt, że zbieżność implikuje warunek Cauchy'ego udowodniliśmy wcześniej. Złóżmy zatem, że $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Weźmy $\varepsilon = 1$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x_m| < 1$ dla $n, m \geqslant n_0$. Stąd $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$ dla $n \geqslant n_0$. Niech M będzie największą z liczb $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|+1$. Wtedy dla każdego $n < n_0$ mamy $|x_n| \leqslant M$. Jeśli $n \geqslant n_0$, to

$$-M \leqslant -|x_{n_0}| - 1 \leqslant x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1 \leqslant |x_{n_0}| + 1 \leqslant M.$$

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do $x \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że wówczas $x_n \to x$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją liczby $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0 \quad \text{oraz}$$

$$|x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1.$$

Niech $N \geqslant n_1$ będzie liczbą naturalną taką, że $k_N \geqslant n_0$. Wówczas dla dowolnego $n \geqslant n_0$ mamy

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definicja. Powiemy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *rozbieżny do plus nieskończoności*, symbolicznie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{lub} \quad x_n \to +\infty,$$

jeśli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \ M < x_n.$$

Powiemy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *rozbieżny do minus nieskończoności*, symbolicznie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{lub} \quad x_n \to -\infty,$$

jeśli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \ x_n < M.$$

Lemat 2.10. *Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych. Wówczas*

1. *jeśli $x_n \to +\infty$, to $-x_n \to -\infty$;*
2. *jeśli $x_n \to +\infty$ oraz $x_n \leqslant y_n$, to $y_n \to +\infty$;*
3. *jeśli $x_n \to x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oraz $y_n \to +\infty$, to $x_n + y_n \to +\infty$;*
4. *jeśli $x_n \to +\infty$ lub $x_n \to -\infty$, to $\frac{1}{x_n} \to 0$.*

Dowód. Pierwsze dwie części lematu wynikają bezpośrednio z definicji.

Ad 3. Ponieważ $x_n \to x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, więc ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z dołu. Niech $m \in \mathbb{R}$ będzie jego ograniczeniem dolnym. Weźmy $M \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $M - m < y_n$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$x_n + y_n > m + (M - m) = M.$$

Ad 4. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n > 1/\varepsilon$ lub $x_n < -1/\varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ mamy $|x_n| > 1/\varepsilon$, a stąd

$$\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon.$$

□

Przykład. 1. Jeśli $x_n = n$, to $x_n \to +\infty$.

2. Jeśli $a > 1$, to $a^n \to +\infty$. Niech $a = 1 + b$, gdzie $b > 0$. Wtedy

$$a^n = (1+b)^n \geqslant 1 + bn \to +\infty.$$

3. Jeśli $|q| < 1$, to $q^n \to 0$. Gdy $q = 0$, to jest to fakt oczywisty. W przeciwnym przypadku niech $a = 1/|q|$. Ponieważ $a > 1$, więc $a^n \to +\infty$, a stąd

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{a^n} \to 0,$$

co implikuje $q^n \to 0$.

4. Jeśli $a > 0$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Jeśli $a = 1$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $a > 1$. Wtedy

$$1 < \sqrt[n]{a} = 1 + x_n,$$

gdzie $x_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$a = (1 + x_n)^n \geqslant 1 + nx_n,$$

a stąd

$$0 < x_n \leqslant \frac{a-1}{n} \to 0.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $x_n \to 0$, a zatem $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n \to 1$.

Jeśli $0 < a < 1$, to $1/a > 1$. Stąd

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1.$$

Zatem $\sqrt[n]{a} \to 1$.

5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Niech

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = 1 + x_n,$$

gdzie $x_n \geqslant 0$. Wtedy

$$n = (1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \ldots \geqslant 1 + \binom{n}{2} x_n^2$$

dla $n \geqslant 2$. Stąd

$$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

a zatem $x_n^2 \leqslant 2/n$. Ponieważ

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0,$$

z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $x_n \to 0$, a w konsekwencji $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n \to 1$.

6. Niech $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i ograniczony, a zatem zbieżny. Z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geqslant 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

tzn. ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący. Ponadto

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Dla dowolnego $k \geqslant 2$ mamy $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k \geqslant 1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^{k-1}$. Stąd

$$\begin{aligned} x_n &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.\end{aligned}$$

W ten sposób pokazaliśmy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący i ograniczony, więc jest zbieżny. Jego granicę będziemy oznaczać literą e. e jest liczbą niewymierną oraz w przybliżeniu równą $2,71828182845\ldots$

7. Niech
$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$
Wówczas ciąg jest zbieżny (jest rosnący i ograniczony z góry przez 3), zaś jego granicą jest e. Do tej pory udowodniliśmy, że $x_n \leqslant y_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponadto pokażemy, że $y_n \leqslant e$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z twierdzenia o trzech ciągach będziemy wiedzieć, że $y_n \to e$. Ustalmy liczbę naturalną $m \in \mathbb{N}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant m$ mamy
$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) =: z_n. \end{aligned}$$
Ponieważ $\frac{1}{n} \to 0$, więc
$$z_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = y_m.$$
Ponieważ $z_n \leqslant x_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $z_n \to y_m$ oraz $x_n \to e$, więc $y_m \leqslant e$, co kończy dowód.

Oznaczenia. Niech $a > 0$ oraz $x = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$. Wówczas oznaczmy $a^x = (\sqrt[k]{a})^n$. Łatwo sprawdzić, że $a^{x+y} = a^x a^y$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ oraz
$$x \leqslant y \Longrightarrow a^x \leqslant a^y \text{ gdy } a > 1,$$
$$x \leqslant y \Longrightarrow a^x \geqslant a^y \text{ gdy } a \leqslant 1.$$
Niech $x \in \mathbb{R}$. Zatem istnieje rosnący ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb wymiernych taki, że $x_n \to x$. Wówczas ciąg a^{x_n} jest monotoniczny i ograniczony, a zatem zbieżny. Oznaczmy $a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$. Ponadto a^x nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 2.11. *Jeśli* $x_n \to \pm\infty$*, to* $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$*.*

Dowód. Najpierw załóżmy, że $x_n \to +\infty$. Łatwo zauważyć, że również $[x_n] \to +\infty$ oraz $[x_n] > 0$ dla odpowiednio dużych n. Ponadto dla odpowiednio dużych n kolejno mamy
$$[x_n] \leqslant x_n < [x_n] + 1$$
$$\frac{1}{[x_n]+1} < \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{[x_n]}$$
$$1 + \frac{1}{[x_n]+1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leqslant 1 + \frac{1}{[x_n]}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right).$$

Ponieważ dwa skrajne ciągi są zbieżne do liczby e, więc z twierdzenie o trzech ciągach otrzymujemy żądaną zbieżność.

Załóżmy, że $x_n \to -\infty$. Wtedy

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(\frac{1+x_n}{x_n}\right)^{x_n} = \left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)^{-x_n} = \left(1-\frac{1}{1+x_n}\right)^{-x_n} = \\ &= \left(1+\frac{1}{-1-x_n}\right)^{-x_n-1}\left(1-\frac{1}{1+x_n}\right).\end{aligned}$$

Ponieważ $-1-x_n \to +\infty$, więc na podstawie tego, co udowodniliśmy wcześniej otrzymujemy żądaną zbieżność. □

Uwaga 7. Załóżmy, że

$$\alpha < \frac{a}{b} < \beta, \quad \alpha < \frac{c}{d} < \beta$$

oraz $b, d > 0$. Wówczas

$$\alpha < \frac{a+c}{b+d} < \beta.$$

Rzeczywiście, ponieważ

$$\alpha b < a < \beta b, \quad \alpha d < c < \beta d,$$

więc podając stronami otrzymujemy

$$\alpha(b+d) < a+c < \beta(b+d),$$

co daje żądaną nierówność.

Twierdzenie 2.12. *(Stolza) Załóżmy, że $y_n \to +\infty$ oraz ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca ściśle rosnący. Wówczas dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jeśli*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = g.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko w przypadku, gdy $g \in \mathbb{R}$. Przypadki $g = \pm\infty$ zostawiamy do udowodnienia czytelnikowi.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ taki, że

$$g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < g + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n \geqslant n_1$. Następnie niech n_0 będzie taką liczbą naturalną, że $n_0 \geqslant n_1$ oraz

$$\left|\frac{x_{n_1} - gy_{n_1}}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

dla $n \geqslant n_0$. Ustalmy $n \geqslant n_0$. Wówczas

$$\begin{aligned}
g - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{x_{n_1+1} - x_{n_1}}{y_{n_1+1} - y_{n_1}} < g + \frac{\varepsilon}{2} \\
g - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{x_{n_1+2} - x_{n_1+1}}{y_{n_1+2} - y_{n_1+1}} < g + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\vdots \\
g - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}} < g + \frac{\varepsilon}{2} \\
g - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < g + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Stosując teraz wielokrotnie obserwację zawartą w poprzedzającej twierdzenie uwadze otrzymujemy

$$g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} < g + \frac{\varepsilon}{2},$$

a zatem

$$\left|\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - g\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{y_n} - g &= \frac{x_{n_1} - gy_{n_1}}{y_n} + \frac{x_n - gy_n - (x_{n_1} - gy_{n_1})}{y_n} = \\
&= \frac{x_{n_1} - gy_{n_1}}{y_n} + \frac{y_n - y_{n_1}}{y_n}\frac{x_n - x_{n_1} - g(y_n - y_{n_1})}{y_n - y_{n_1}} = \\
&= \frac{x_{n_1} - gy_{n_1}}{y_n} + \left(1 - \frac{y_{n_1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - g\right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - g\right| \leqslant \left|\frac{x_{n_1} - gy_{n_1}}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_{n_1}}{y_n - y_{n_1}} - g\right|$$

dla $n \geqslant n_0$. Zatem na mocy (1) oraz (2) otrzymujemy

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - g\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla $n \geqslant n_0$, co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 2.13. *Jeśli* $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Dowód. Niech $x_n = a_1 + \ldots + a_n$ oraz $y_n = n$. Wówczas $y_n \to +\infty$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący. Ponadto

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{a_n}{1} \to a.$$

Na podstawie twierdzenia Stolza otrzymujemy, że $\frac{x_n}{y_n} \to a$. □

Definicja. Mówimy, że $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest *punktem skupienia* ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $x_{k_n} \to x$. Zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będziemy oznaczać przez $A(\{x_n\})$.

Uwaga 8. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to

$$x \in A(\{x_n\}) \iff \forall_{\varepsilon>0} \forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{n\geqslant k} |x_n - x| < \varepsilon.$$

Przykład. Niech $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Wówczas $A(\{x_n\}) = \{-1, 1\}$.

Twierdzenie 2.14. *Niech* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem ograniczonym z góry (z dołu). Wówczas zbiór* $A(\{x_n\})$ *jest ograniczony z góry (z dołu) i posiada element największy (najmniejszy).*

Dowód. Ponieważ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry więc istnieje $M \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $x \in A(\{x_n\})$, to $x_{k_n} \to x$. Wtedy $x \leftarrow x_{n_k} \leqslant M$, a stąd $x \leqslant M$. Zatem zbiór $A(\{x_n\})$ jest ograniczony z góry. Niech $\alpha = \sup A(\{x_n\})$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $x \in A(\{x_n\})$ taki, że

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponadto

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{n\geqslant k} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeśli $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, to

$$|x_n - \alpha| \leqslant |x_n - x| + |x - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stąd
$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\,\exists_{n\geqslant k}|x_n-\alpha|<\varepsilon,$$
co oznacza, że $\alpha\in A(\{x_n\})$. Ponieważ α jest ograniczeniem górnym zbioru $A(\{x_n\})$ i jest jego elementem, więc jest elementem największym. Analogicznie dowodzi się istnienia elementu najmniejszego. □

Definicja. Największy punkt skupienia ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *granicą górną* ciągu i oznaczamy przez
$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{lub } \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$
Najmniejszy punkt skupienia ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *granicą dolną* ciągu i oznaczamy przez
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{lub } \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$
Jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy
$$\limsup_{n\to\infty} x_n=\sup A(\{x_n\})=+\infty,$$
a jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z dołu, to przyjmujemy
$$\liminf_{n\to\infty} x_n=\inf A(\{x_n\})=-\infty.$$
Uwaga 9. Ogólnie
$$\liminf_{n\to\infty} x_n\leqslant\limsup_{n\to\infty} x_n.$$
Ponadto, dla ciągów ograniczonych mamy
$$\lim_{n\to\infty} x_n=x \iff A(\{x_n\})=\{x\} \iff \liminf_{n\to\infty} x_n=\limsup_{n\to\infty} x_n=x.$$
Dowód. $\Longrightarrow$. Oczywiste.

$\Longleftarrow$. Załóżmy, że $A(\{x_n\})=\{x\}$ oraz przypuśćmy, że $x_n\nrightarrow x$. Wówczas istnieje $\varepsilon>0$ taki, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje $k\geqslant n$ takie, że $|x_k-x|\geqslant\varepsilon>0$. Zatem istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$ taki, że $|x_{k_n}-x|\geqslant\varepsilon>0$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$. Ponieważ podciąg ten jest ograniczony, więc z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje jego podciąg $\{x_{k_{l_n}}\}$, który jest zbieżny do $y\in\mathbb{R}$. Ponieważ $|x_{k_{l_n}}-x|\geqslant\varepsilon>0$, więc przechodząc do granicy otrzymujemy $|y-x|\geqslant\varepsilon>0$. Zatem $x\neq y\in A(\{x_n\})$, co prowadzi sprzeczność z założeniem $A(\{x_n\})=\{x\}$. □

Twierdzenie 2.15. *Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas*
$$\liminf_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} x_k \quad \textit{oraz} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} x_k.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla granicy górnej. Dowód dla granicy dolnej jest analogiczny. Załóżmy ponadto, że ciąg jest ograniczony. Niech

$$\overline{x}_n = \sup_{k \geqslant n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Wówczas

$$\overline{x}_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \geqslant \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \overline{x}_{n+1}.$$

Zatem ciąg $\{\overline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny do pewnej liczby x. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|\overline{x}_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Ponieważ $x_n \leqslant \overline{x}_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc $x_n \leqslant \overline{x}_n < x + \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd wynika, że jeśli a jest punktem skupienia ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, to $a \leqslant x + \varepsilon$. Zatem

$$\limsup_{n \to \infty} x_n \leqslant x + \varepsilon.$$

Ponieważ dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} > x - \varepsilon \Longrightarrow \forall_{n \geqslant n_0} \exists_{k \geqslant n}\, x_k > x - \varepsilon,$$

więc istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x_{k_n} > x - \varepsilon$. Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{k_{l_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x_{k_{l_n}} \to a$. Wtedy $a \geqslant x - \varepsilon$. Ponieważ a jest punktem skupienia ciągu, więc

$$x - \varepsilon \leqslant a \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n.$$

Zatem

$$x - \varepsilon \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n \leqslant x + \varepsilon$$

dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$. Stąd

$$x - \frac{1}{m} \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n \leqslant x + \frac{1}{m}$$

dla dowolnej liczby naturalnej m. Przechodząc z m do nieskończoności otrzymujemy

$$x \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n \leqslant x \Longrightarrow x = \limsup_{n \to \infty} x_n.$$

□

Wniosek 2.16. *Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeśli $\limsup_{n \to \infty} x_n < \alpha$, to $x_n < \alpha$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\limsup_{n \to \infty} x_n > \alpha$, to $x_n > \alpha$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\liminf_{n \to \infty} x_n > \alpha$, to $x_n > \alpha$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\liminf_{n \to \infty} x_n < \alpha$, to $x_n < \alpha$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech $x = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Załóżmy, że $x < \alpha$. Ponieważ $\overline{x}_n \to x$, więc istnieje n_0 takie, że $\overline{x}_n < \alpha$ dla $n \geqslant n_0$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$x_n \leqslant \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \overline{x}_n < \alpha,$$

tzn. $x_n < \alpha$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że $x > \alpha$. Wówczas istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$ zbieżny do x. Zatem istnieje n_0 takie, że $x_{k_n} > \alpha$ dla $n \geqslant n_0$, zatem $x_n > \alpha$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. □

Twierdzenie 2.17. *Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Wówczas*

1. $$\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n;$$

2. $$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

Dowód. Ad 1. Niech $x = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Wówczas istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$ taki, że $x_{k_n} \to x$. Ponieważ ciąg $\{y_{k_n}\}$ jest ograniczony, więc z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $\{y_{k_{l_n}}\}$ zbieżny $a \in \mathbb{R}$. Ponieważ a jest punktem skupienia dla $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, więc $\liminf_{n\to\infty} y_n \leqslant a$. Ponadto $x_{k_{l_n}} + y_{k_{l_n}} \to x + a$. Ponieważ $x + a$ jest punktem skupienia dla $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leqslant x + a \leqslant \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n).$$

Niech $z = \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. Wówczas istnieje podciąg $\{x_{k_n} + y_{k_n}\}$ zbieżny do z. Ponieważ ciąg $\{y_{k_n}\}$ jest ograniczony, więc z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $\{y_{k_{l_n}}\}$ zbieżny $a \in \mathbb{R}$. Wtedy $x_{k_{l_n}} = (x_{k_{l_n}} + y_{k_{l_n}}) - y_{k_{l_n}} \to z - a$. Ponieważ a jest punktem skupienia dla $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $z - a$ jest punktem skupienia dla $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, więc

$$a \leqslant \limsup_{n\to\infty} y_n \quad \text{oraz} \quad z - a \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = z = (z - a) + a \leqslant \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

Ad.2. Analogicznie. □

Przykład. Niech $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$, $y_n = \cos\frac{\pi n}{2}$, tzn.

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots), \quad \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots);$$

$$\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots).$$

Wówczas

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} y_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} y_n = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -1, \quad \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 1,$$

zatem w Ad.1. oraz Ad.2 wszystkie nierówności są ostre.

Wniosek 2.18. *Jeśli ciąg* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny, to*

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \liminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n.$$

3 Szeregi liczbowe

Definicja. Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg sum $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ & \vdots & \\ S_n & = & a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ & \vdots & \end{array}$$

nazywamy *szeregiem o wyrazach* $a_1, a_2, \ldots$ lub krótko szeregiem i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{lub} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Sumę S_n nazywamy *n–tą sumą częściową* szeregu. Jeśli ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, natomiast granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

nazywamy *sumą szeregu* i piszemy wtedy

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeśli ciąg $\{S_n\}$ nie jest zbieżny, to szereg nazywamy *rozbieżnym.*

Przykład. 1. Rozważmy szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$
Jeśli $q \neq 1$, to ciąg sum częściowych jest następujący
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$
Jeśli $|q| < 1$, to $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Jeśli $|q| \geqslant 1$, to $S_n = \frac{q^n-1}{q-1}$ jest rozbieżny. Jeśli $q = 1$, to $S_n = n$, zatem też jest rozbieżny. Podsumowując szereg $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $|q| < 1$.

2. Szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
jest zbieżny. Istotnie, ponieważ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, więc ciąg sum częściowych jest następujący
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$
Zatem suma tego szeregu wynosi 1.

Twierdzenie 3.1. *(warunek konieczny zbieżności szeregu) Jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, to $x_n \to 0$.*

Dowód. Mamy $x_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. □

Twierdzenie 3.2. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geqslant n_0}\, \forall_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}| < \varepsilon.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że
$$|S_{n+k} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}|$$
oraz skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego dla ciągu $\{S_n\}$. □

Twierdzenie 3.3. *Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ są zbieżne oraz*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dowód. Wystaczy skorzystać z twierdzenia 2.5 dla ciągów sum częściowych. □

3.1 Szeregi o wyrazach nieujemnych

Uwaga 10. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg $\{S_n\}$ jest niemalejący. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony, tzn. istnieje $M \geqslant 0$ takie, że $S_n \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dlatego też w przypadku, gdy mamy do czynienia z szeregami o wyrazach nieujemnych jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny, to ponieważ $\{S_n\}$ jest niemalejący, więc $S_n \to +\infty$, a wtedy piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Twierdzenie 3.4. *(kryterium porównawcze) Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oraz $S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Niech $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n_0$. Wówczas $S_n - S_{n_0} \leqslant S'_n - S'_{n_0}$ dla $n \geqslant n_0$.

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, to $S_n \to +\infty$. Ponieważ $S_n - S_{n_0} + S'_{n_0} \leqslant S'_n$, więc $S'_n \to +\infty$, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Druga część twierdzenia wynika z pierwszej części i prawa kontrapozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ □

Wniosek 3.5. *Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami o wyrazach dodatnich. Załóżmy, że istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \beta.$$

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest również zbieżny. Jeśli $\beta > 0$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest również rozbieżny.

Dowód. Jeśli ciąg $\{a_n/b_n\}$ jest zbieżny, to jest ograniczony, więc istnieje $M \leqslant 0$ takie, że $a_n \leqslant Mb_n$. Wówczas z kryterium porównawczego zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} Mb_n$ implikuje zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeśli $\beta > 0$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n/b_n > \beta/2$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd $\frac{\beta}{2} b_n < a_n$ dla $n \geqslant n_0$. Wówczas z kryterium porównawczego rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} b_n = +\infty$ implikuje rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Twierdzenie 3.6. *(kryterium Cauchy'ego) Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych. Wówczas*

$$\text{\textit{jeśli} } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1, \text{ \textit{to szereg} } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ \textit{jest zbieżny;}}$$

$$\textit{jeśli} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1, \ \textit{to szereg} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest rozbieżny.}$$

Dowód. Załóżmy, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Niech r będzie liczbą rzeczywistą taką, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < r < 1$. Wówczas $\sqrt[n]{a_n} < r$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, zatem $a_n < r^n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Załóżmy, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Wówczas $\sqrt[n]{a_n} > 1$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, a zatem $a_n > 1$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że $a_n \not\to 0$. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny. □

Przykład. Niech $x > 0$. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{a_n} = x/n \to 0 < 1$, więc z kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 3.7. *(kryterium d'Alamberta) Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wówczas*

$$\textit{jeśli} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \textit{to szereg} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest zbieżny;}$$

$$\textit{jeśli} \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \textit{to szereg} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest rozbieżny.}$$

Dowód. Załóżmy, że $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Niech r będzie liczbą rzeczywistą taką, że $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < r^{n-n_0}.$$

Stąd $a_n < a_{n_0} r^{-n_0} r^n$ dla $n \geqslant n_0$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} r^{-n_0} r^n$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Załóżmy, że $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1.$$

Stąd $a_n > a_{n_0} > 0$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd wynika, że $a_n \not\to 0$. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny. □

Przykład. Niech $x > 0$. Rozważmy szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
Ponieważ
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n} \to 0 < 1,$$
więc z kryterium d'Alamberta szereg jest zbieżny.

Przykład. Niech a, b będą liczbami dodatnimi takimi, że $a < 1 < b$. Rozważmy szereg
$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \ldots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \ldots,$$
tzn. $a_{2n} = a^n b^{n-1}$, $a_{2n+1} = a^n b^n$. Wówczas
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{a^n b^n}{a^n b^{n-1}} = b > 1, \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{a^n b^{n-1}}{a^{n-1} b^{n-1}} = a < 1.$$
Zatem
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1 < b = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$
czyli kryterium d'Alamberta nie rozstrzyga zbieżności szeregu. Natomiast
$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{a^n b^n} \to \sqrt{ab} \text{ oraz } \sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{a^n b^{n-1}} \to \sqrt{ab}.$$
Stosując kryterium Cauchy'ego wnioskujemy, że jeśli $\sqrt{ab} < 1$, to szereg jest zbieżny oraz jeśli $\sqrt{ab} > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 3.8. *Załóżmy, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym liczb dodatnich. Wówczas*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oraz $U_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$. Dla dowolnej liczby naturalnej k mamy
$$2^{k-1} a_{2^k} = (2^k - 2^{k-1}) a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \ldots + a_{2^k} \leqslant 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$
Ponieważ
$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}),$$
więc
$$\frac{1}{2} U_n \leqslant S_{2^n} \leqslant a_1 + U_{n-1}. \tag{3}$$

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny, to ciąg $\{U_n\}$ jest ograniczony. Zatem ciąg $\{S_{2^n}\}$ jest ograniczony ze względu na (3). Ponieważ $\{S_n\}$ jest monotoniczny i posiada podciąg ograniczony, więc sam jest ograniczony, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\{S_n\}$ jest ograniczony. Ze względu na (3) $\{U_n\}$ też jest ograniczony, a zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny. □

Wniosek 3.9. *Jeśli $\alpha > 0$, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Dowód. Niech $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, więc możemy zastosować poprzednie twierdzenie. Wówczas

$$2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})^n.$$

Zatem $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $2^{1-\alpha}$. Jest on zbieżny dokładnie wtedy, gdy

$$2^{1-\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Longleftrightarrow 1 < \alpha.$$

□

Wniosek 3.10. *Szereg harmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

jest rozbieżny. Natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Przykład. 1. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n}.$$

Niech $b_n = n^{-3/2}$. Wówczas

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}}{n^{-3/2}} = \frac{n^2}{n^2 + n} = 1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ jest zbieżny, więc i wyjściowy szereg jest zbieżny.

2. Rozważmy szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$
Niech $b_n = n^{-1}$. Wówczas
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{n^{-1}} = \frac{n+n^2}{1+n^2} = 1 > 0.$$
Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ jest rozbieżny, więc i wyjściowy szereg jest rozbieżny.

4 Dowolne szeregi rzeczywiste c.d.

Definicja. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.1. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Dowód. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, tzn.
$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geqslant n_0} \forall_{k\in\mathbb{N}}\, \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}|\big| < \varepsilon.$$
Z nierówności trójkąta mamy
$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| &\leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| = \\ &= \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}|\big|. \end{aligned}$$
Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. □

Definicja. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, jeśli szereg jest zbieżny i nie jest bezwzględnie zbieżny.

Przykład. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$
jest bezwzględnie zbieżny. Ponieważ
$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$
oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.2. *(kryterium Dirichleta) Niech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *będą ciągami rzeczywistymi. Załóżmy, że*

- *ciąg* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest monotonicznie zbieżny do zera;*
- *ciąg sum częściowych* $B_n = b_1 + \ldots + b_n$ *jest ograniczony.*

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnący. W przeciwnym przypadku dowód jest analogiczny. Ponieważ $a_n \to 0$, więc $a_n \leqslant 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ ciąg $\{B_n\}$ jest ograniczony, więc wybierzmy $B > 0$ takie, że $|B_n| \leqslant B$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n < \varepsilon/(2B)$ dla $n \geqslant n_0$. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ oraz $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+k}b_{n+k} = \\
=&a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \ldots + a_{n+k}(B_{n+k} - B_{n+k-1}) = \\
=&-B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + B_{n+k-1}(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + B_{n+k}a_{n+k}.
\end{aligned}$$

Stąd wykorzystując nierówność trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+k}b_{n+k}| \leqslant \\
&\leqslant \quad Ba_{n+1} + B(a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + B(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + Ba_{n+k} = \\
&= \quad B(a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k}) = \\
&= \quad 2Ba_{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

dla $n \geqslant n_0$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. □

Oznaczenia. Szeregi postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

gdzie $a_n \geqslant 0$ nazywamy *naprzemiennymi.*

Twierdzenie 4.3. *(kryterium Leibniza) Załóżmy, że ciąg jest monotoniczny i zbieżny do zera. Wówczas szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Niech $b_n = (-1)^{n+1}$, wtedy $B_n = 0$, gdy n jest parzysta oraz $B_n = 1$, gdy n jest nieparzysta. Zatem ciąg $\{B_n\}$ jest ograniczony. Teraz korzystając z kryterium Dirichleta otrzymujemy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. □

Przykład. 1. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Ponieważ ciąg $a_n = 1/n$ monotonicznie zbiera do zera, więc na podstawie kryterium Leibniza nasze szereg jest zbieżny. Nie jest on jednak bezwzględnie zbieżny, ponieważ szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Można udowodnić, że suma naszego szeregu wynosi $\ln 2$.

2. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Niech $a_n = 1/n$ oraz $b_n = \sin(nx)$. Można pokazać, że ciąg $B_n = \sum_{k=1}^{n}\sin(nx)$ jest ograniczony (ćwiczenie), więc z kryterium Dirichleta otrzymujemy zbieżność szeregu.

Twierdzenie 4.4. *(kryterium Abela) Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami rzeczywistymi. Załóżmy, że*

- *ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny i zbieżny;*
- *szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.*

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Niech a będzie granicą ciągu $\{a_n\}$. Wówczas ciąg $\{a_n - a\}$ monotonicznie zbiega do zera. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, więc ciąg sum częściowych B_n jest ograniczony. Zatem z twierdzenia Dirichleta szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$$

jest zbieżny. Ponadto wiemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$$

jest zbieżny. Zatem korzystając z tego, że $a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n$ otrzymujemy zbieżność naszego szeregu. □

Przykład. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Jest on zbieżny w oparciu o poprzedni przykład oraz kryterium Abela.

Twierdzenie 4.5. *Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym oraz $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutacją zbioru liczb naturalnych (bijekcja). Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ jest bezwzględnie zbieżny oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dowód. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{i=N+1}^{N+k} |a_i| < \varepsilon/2.$$

Ponieważ π jest bijekcją więc istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n_1)\}.$$

Wówczas jeśli $n > n_1$, to $\pi(n) > N$. Oznaczmy

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad T_n = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \ldots + a_{\pi(n)}.$$

Załóżmy, że $n > n_1$. Wówczas

$$|S_n - T_n| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\max\{\pi(k):1\leqslant k\leqslant n\}} |a_i| < \varepsilon/2.$$

Ponieważ $S_n \to S$, więc istnieje $n_0 \geqslant n_1$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $|S_n - T_n| < \varepsilon/2$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ otrzymujemy

$$|T_n - S| \leqslant |T_n - S_n| + |S_n - S| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Stąd $T_n \to S$. □

Twierdzenie 4.6. *(Riemanna) Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, tzn. jest zbieżny lecz nie jest bezwzględnie zbieżny. Wówczas dla dowolnego $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ istnieje permutacja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S.$$

Twierdzenie 4.7. *Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym. Załóżmy, że $\{i_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych takim, że $i_0 = 0$. Niech $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem danym wzorem*

$$b_n = a_{i_{n-1}+1} + a_{i_{n-1}+2} + \ldots + a_{i_n}.$$

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dowód. Niech A_n i B_n będą sumami częściowymi odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Wówczas $B_n = A_{i_n}$ jest zbieżny do $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Uwaga 11. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nie należy wnioskować zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ oraz niech $i_n = 2n$ dla $n \geqslant 0$. Wówczas $b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = 1 - 1 = 0$. Oczywiście szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny zaś $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nie jest zbieżny.

4.1 Iloczyn szeregów

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami zbieżnymi. Rozważmy wszystkie iloczyny wyrazów tych szeregów tzn. $\{a_i b_j : i, j \in \mathbb{N}\}$. Iloczyny te można ustawić w ciąg nieskończony na wiele różnych sposobów i utworzyć z nich szereg. Jeśli wyjściowe szeregi są bezwzględnie zbieżne, to wszystkie w ten sposób utworzone szeregi będą posiadały tę samą sumę.

Twierdzenie 4.8. *(Cauchy'ego) Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ są bezwzględnie zbieżne, to szereg utworzony z iloczynów $a_i b_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ zsumowanych w dowolnej kolejności jest bezwzględnie zbieżny oraz*

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j = AB.$$

Dowód. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*$. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ będzie szeregiem utworzony z ustawienia iloczynów $a_i b_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ w ciąg $\{a_{i_n} b_{j_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pokażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{j_n}|$ jest zbieżny. Niech D_n będzie n–tą sumą częściową tego szeregu. Niech $k_n = \max\{i_k, j_l : 1 \leqslant k, l \leqslant n\}$. Wówczas

$$D_n = \sum_{m=1}^{k} |a_{i_n} b_{j_n}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k_n} |a_i||b_j| = \sum_{i=1}^{k_n} |a_i| \sum_{j=1}^{k_n} |b_j| \leqslant A^* B^*.$$

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ jest bezwzględnie zbieżny i z twierdzenie 4.5 jego suma nie zależny od kolejności zliczania iloczynów. Ustawmy zatem iloczyny $a_i b_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ w szereg postaci

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) + (a_1 b_4 + \ldots.$$

Niech $d_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n b_1$. Z twierdzenia 4.7 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jest zbieżny zaś jego suma jest równa $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$. Niech A_n, B_n oraz D_n będą n–tymi sumami częściowymi odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$. Wówczas

$$D_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i b_j = A_n B_n \to AB.$$

□

Definicja. Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$, tzn.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ c_3 &= a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ &\vdots \\ c_n &= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wniosek 4.9. *Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ są bezwzględnie zbieżne oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest ich iloczynem Cauchy'ego, to $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny oraz jego suma wynosi $A \cdot B$.*

Przykład. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Rozważmy szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, które jak wiemy są bezwzględnie zbieżne. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie ich iloczynem Cauchy'ego. Wówczas

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Z poprzedzającego wniosku otrzymujemy zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Twierdzenie 4.10. *(Mertensa) Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ jest bezwzględnie zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ jest zbieżny. Wówczas ich iloczyn Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny oraz jego suma wynosi $A \cdot B$.*

Dowód. Oznaczmy przez A_n, B_n i C_n n–tą sumę częściową odpowiednio szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} a_k b_{j+1-k} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} a_k b_{j+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} a_k b_{j+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=k}^{n} b_{j+1-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1-k}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Oznaczmy $\beta_n = B - B_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k (B - \beta_{n+1-k}) = A_n B - \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_{n+1-k}.$$

Jeśli oznaczymy $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\beta_{n+1-k}$, to $C_n = A_nB - \gamma_n$. Ponieważ $A_n \to A$, wystarczy pokazać, że $\gamma_n \to 0$.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\beta_n \to 0$, więc istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_1$ mamy

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2A^*},$$

gdzie $A* = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Zbieżność ciągu $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ implikuje jego ograniczoność, a zatem istnieje $M > 0$ takie, że $|\beta_n| \leqslant M$ dla dowolnego naturalnego n. Z warunku koniecznego wynika, że $a_n \to 0$. Stąd istnieje $n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_2$ mamy

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2Mn_1}.$$

Niech $n_0 = n_1 + n_2 - 2$. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}|\gamma_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k\beta_{n+1-k}| = |a_1\beta_n| + |a_2\beta_{n-1}| + \ldots + |a_{n-1}\beta_2| + |a_n\beta_1| = \\ &= (|a_1||\beta_n| + \ldots + |a_{n-n_1+1}||\beta_{n_1}|) + (|a_{n-n_1+2}||\beta_{n_1-1}| + \ldots + |a_n||\beta_1|) < \\ &< (|a_1| + \ldots + |a_{n+n_1-1}|)\frac{\varepsilon}{2A^*} + (n_1 - 1)\frac{\varepsilon}{2Mn_1}M \leqslant A^*\frac{\varepsilon}{2A^*} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Stąd $\gamma_n \to 0$. □

5 Granica funkcji

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. *Punktem skupienia* zbioru A nazywać będziemy dowolny punkt $x \in \mathbb{R}$, dla którego istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $x_n \in A$, $x_n \neq x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to x$. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A będziemy oznaczać przez A^d. Jeśli istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $x_n \in A$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to +\infty(-\infty)$, to mówimy, że $+\infty(-\infty)$ jest *niewłaściwym punktem skupienia* zbioru A.

Przykład.
1. $(0,1]^d = [0,1]$;
2. $((-1,1) \cup \{2\})^d = [-1,1]$;
3. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}^d = \{0\}$;
4. $\mathbb{Q}^d = \mathbb{R}$;
5. $\mathbb{Z}^d = \emptyset$.

Uwaga 12.

$$x_0 \in A^d \iff \forall_{\delta>0}\, \exists_{x\in A}\, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Definicja. (Heinego granicy funkcji) Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D^d$. Mówimy, że f posiada w punkcie x_0 *granicę w sensie Heinego* $y_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to x_0$ zachodzi $f(x_n) \to y_0$.

Definicja. (Cauchy'ego granicy funkcji) Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D^d$. Mówimy, że f posiada w punkcie x_0 *granicę w sensie Cauchy'ego* $y_0 \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}\ \left(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon\right).$$

Twierdzenie 5.1. *Definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.*

Dowód. Załóżmy, że y_0 jest granicą w sensie Cauchy'ego funkcji f w punkcie $x_0 \in D^d$. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to x_0$. Musimy pokazać, że $f(x_n) \to y_0$. Weźmy zatem dowolny $\varepsilon > 0$. Na mocy definicji Cauchy'ego istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnej liczby $x \in D$ takiej, że $0 < |x - x_0| < \delta$, mamy $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. Ponieważ $x_n \to x_0$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $0 < |x_n - x_0| < \delta$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd dla $n \geqslant n_0$ otrzymujemy $|f(x_n) - y_0| < \varepsilon$, a zatem $f(x_n) \to y_0$.

Załóżmy, że y_0 jest granicą w sensie Heinego funkcji f w punkcie $x_0 \in D^d$. Przypuśćmy, że y_0 nie jest granicą w sensie Cauchy'ego funkcji f w punkcie x_0. Wtedy

$$\exists_{\varepsilon>0}\, \forall_{\delta>0}\, \exists_{x\in D}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \wedge\ |f(x) - y_0| \geqslant \varepsilon.$$

Biorąc kolejno za $\delta = \frac{1}{n}$ skonstruujemy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $x_n \in D$, $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ oraz $|f(x_n) - y_0| \geqslant \varepsilon$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $x_n \to x_0$, a więc z definicji Heinego mamy $f(x_n) \to y_0$, co stoi w sprzeczności z warunkiem $|f(x_n) - y_0| \geqslant \varepsilon$. $\square$

Oznaczenia. Jeśli y_0 jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in D^d$, to piszemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Stwierdzenie 5.2. *Niech $f, g : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D^d$. Załóżmy, że $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ oraz $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Wówczas*

1. $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha a$ *dla dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$;
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$;
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, *gdy* $b \neq 0$.

Dowód. Ad.1. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ oraz $x_n \to x_0$. Musimy pokazać, że $\alpha f(x_n) \to \alpha a$. Ale, z definicji Heinego, wiemy, że $f(x_n) \to a$. Stosując teraz twierdzenie 2.5 otrzymujemy pożądaną zbieżność.

Pozostałe części wynikają również bezpośrednio z twierdzenie 2.5. $\square$

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$. Jeśli $x_0 \in D^d$, to

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \\ \Leftrightarrow\ & \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{x_0\}}(x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to +\infty(-\infty)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall_{M\in\mathbb{R}}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < M)). \end{aligned}$$

Jeśli $\pm\infty$ jest niewłaściwym punktem skupienia zbioru D, to

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{x_0\}}(x_n \to +\infty(-\infty) \Rightarrow f(x_n) \to y_0) \\ \Leftrightarrow\ & \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{M\in\mathbb{R}}\, \forall_{x\in D}(f(x) > M\ (f(x) < M) \Rightarrow |f(x_0) - y_0| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Analogicznie możemy zdefiniować co to znaczy, że $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Przykład.

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, bo jeśli $x_n \to 2$, to $x_n^2 \to 4$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{sgn}(x))^2 = 1$, gdzie

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0. \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy wziąć $M = \pm\frac{1}{\varepsilon}$. Jeśli $x > \frac{1}{\varepsilon}$ lub $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, to $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Weźmy dowolne $M > 0$. Niech $N = \ln M$. Jeśli $x > N = \ln M$, to $e^x > e^{\ln M} = M$.

   Jeśli $x_n \to -\infty$, to $-x_n \to +\infty$, a wtedy $e^{-x_n} \to +\infty$. Jednak $e^{x_n} = \frac{1}{e^{-x_n}} \to 0$ z poprzedniego przykładu.

5. Jeśli $x_0 > 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$. Załóżmy, że $\ln x_0$ nie jest granicą funkcji ln w punkcie x_0. Z definicji Heinego istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $x_n \to x_0$ oraz $\ln x_n \nrightarrow \ln x_0$. Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest odgraniczony od zera, tzn. $1/M < x_n <$

M, więc $|\ln x_n| < \ln M$. Zatem możemy wybrać podciąg $\{\ln x_{k_n}\}$, który jest zbieżny do $y_0 \neq \ln x_0$. Wówczas

$$x_{k_n} = e^{\ln x_{k_n}} \to e^{y_0} \neq e^{\ln x_0} = x_0,$$

co prowadzi do sprzeczności.

6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ (ćwiczenie).

8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} -x\ln x = 0$. Najpierw rozważmy ciąg

$$-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Ten ciąg zbiega do 0 na podstawie twierdzenie Stolza. Rzeczywiście, niech $a_n = \ln(n+1)$, $b_n = n$. Wtedy b_n jest monotonicznie rozbieżny do $+\infty$ oraz

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{(n+1)-n} = \ln\frac{n+2}{n+1} \to \ln 1 = 0.$$

Załóżmy, że $x_n > 0$ oraz $x_n \to 0$. Wtedy $[1/x_n] \to +\infty$. Wówczas dla odpowiednio dużych n kolejno mamy

$$[\frac{1}{x_n}] \leqslant \frac{1}{x_n} < [\frac{1}{x_n}] + 1$$

$$\frac{1}{[\frac{1}{x_n}]+1} < x_n \leqslant \frac{1}{[\frac{1}{x_n}]}$$

$$0 < -x_n\ln x_n < -\frac{1}{[\frac{1}{x_n}]}\ln\frac{1}{[\frac{1}{x_n}]+1} \to 0.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $-x_n\ln x_n \to 0$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$, ponieważ $x^x = e^{x\ln x}$.

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))^d$ ($x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))^d$). Liczba y_0 jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie x_0, co oznaczamy przez $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = y_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$), jeśli dla dowolnego ciągu $x_n \to x_0$ takiego, że $x_0 < x_n$ ($x_n < x_0$) dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(x_n) \to y_0$, lub równoważnie

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D} \Big(0 < x - x_0 < \delta\, (0 < x_0 - x < \delta) \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon\Big).$$

Przykład. Jeśli $n \in \mathbb{Z}$, to $\lim\limits_{x \to n^+} [x] = n$ oraz $\lim\limits_{x \to n^-} [x] = n - 1$.

Oznaczenia. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) jest

- *rosnąca*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) < f(x_2)$;
- *malejąca*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) > f(x_2)$;
- *niemalejąca*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
- *nierosnąca*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
- *monotoniczna*, jeśli spełniony jest jeden powyższych czterech warunków;
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca albo malejąca.

Twierdzenie 5.3. *Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną. Jeśli x_0 jest punktem skupienia $D \cap (x_0, +\infty)$ ($D \cap (-\infty, x_0)$), to istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (lewostronna $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$).*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f jest niemalejąca.

Przypadek 1. Załóżmy, że f na zbiorze $D \cap (x_0, +\infty)$ nie jest ograniczona z dołu. Pokażemy, że $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$. Weźmy dowolne $M < 0$. Wtedy istnieje $x_M \in D \cap (x_0, +\infty)$ taki, że $f(x_M) < M$. Niech $\delta = x_M - x_0 > 0$. Wówczas jeśli $0 < x - x_0 < \delta = x_M - x_0$, to $x < x_M$, a zatem $f(x) \leqslant f(x_M) < M$, co implikuje $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Przypadek 2. Załóżmy, że f na zbiorze $D \cap (x_0, +\infty)$ jest ograniczona z dołu. Niech

$$a := \inf\{f(x) : x \in D \cap (x_0, +\infty)\}.$$

Pokażemy, że $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $x_\varepsilon \in D \cap (x_0, +\infty)$ taki, że $a + \varepsilon > f(x_\varepsilon)$. Niech $\delta = x_\varepsilon - x_0 > 0$. Wówczas jeśli $0 < x - x_0 < \delta = x_\varepsilon - x_0$, to $x < x_\varepsilon$, a zatem

$$a \leqslant f(x) \leqslant f(x_\varepsilon) < a + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

a stąd $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$. □

Twierdzenie 5.4. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Jeśli x_0 jest punktem skupienia $D \cap (x_0, +\infty)$ oraz $D \cap (-\infty, x_0)$). Wówczas granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.*

Dowód. Jeśli granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje, to wprost z definicji istnieją granice jednostronne i są one równe granicy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Załóżmy, że granice jednostronne istnieją oraz $y_0 = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $\delta_1, \delta_2 > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in D$ mamy

$$0 < x - x_0 < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon,$$

$$0 < x_0 - x < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Niech $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Wówczas jeśli $x \in D$ oraz $0 < |x - x_0| < \delta$, to $0 < x - x_0 < \delta_1$ albo $0 < x_0 - x < \delta_2$,a zatem $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. □

Uwaga 13. Dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$ mamy $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Zatem $|\sin x| \leqslant |x|$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ sin jest funkcją nieparzystą wystarczy pokazać, że $|\sin x| \leqslant x$ dla $x > 0$. Jeśli $x \in (0, \pi/2)$, to nierówność jest spełniona. Gdy $x \geqslant \pi/2$, to $|\sin x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant x$. Zatem jeśli $x_n \to x_0$, to

$$|\sin x_n - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\cos\frac{x_n + x_0}{2}| \leqslant 2|\sin\frac{x_n - x_0}{2}| \leqslant |x_n - x_0| \to 0,$$

$$|\cos x_n - \cos x_0| = 2|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\sin\frac{x_n + x_0}{2}| \leqslant 2|\sin\frac{x_n - x_0}{2}| \leqslant |x_n - x_0| \to 0.$$

Stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$.

Ponadto, jeśli $x_n \to 0$ oraz $x_n \in (0, \pi/2)$, to

$$1 \leftarrow \cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Ponadto $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, a więc $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

6 Ciągłość funkcji

Definicja. (Heinego) Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$. Mówimy, że f jest *ciągła* w punkcie x_0, jeśli dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n \in D$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \to x_0$ zachodzi $f(x_n) \to f(x_0)$.

Definicja. (Cauchy'ego) Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$. Mówimy, że f jest *ciągła* w punkcie x_0, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}\ \left(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

Uwaga 14. Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia zbioru D, to ciągłość w punkcie x_0 w sensie Heinego i w sensie Cauchy'ego są równoważne oraz są równoważne temu, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Jeśli $x_0 \in D$ nie jest punktem skupienia zbioru D, tzn. istnieje $\delta > 0$ takie, że $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D = \{x_0\}$, wówczas dowolna funkcja f jest ciągła w x_0 zarówno w sensie w sensie Heinego i Cauchy'ego.

Definicja. Powiemy, że funkcja f jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 6.1. *Załóżmy, funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Wtedy funkcje αf, $f + g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ są również ciągłe.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \in D$ oraz $x_n \to x_0$. Musimy pokazać, że $\alpha f(x_n) \to \alpha f(x_0)$. Ale, z definicji Heinego, wiemy, że $f(x_n) \to f(x_0)$. Stosując teraz twierdzenie 2.5 otrzymujemy pożądaną zbieżność.

Pozostałe części wynikają również bezpośrednio z twierdzenie 2.5. $\square$

Przykład.

1. Ponieważ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ jest ciągła (bezpośrednio z definicji) więc na podstawie poprzedniego twierdzenia również każda funkcja wielomianowa postaci

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

oraz dowolna funkcja wymierna postaci

$$x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

jest ciągła.

2. W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że funkcje sin oraz cos są ciągłe, a zatem $\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ oraz $\mathrm{ctg} = \frac{\cos}{\sin}$ są ciągłe.

3. Również w poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że funkcja ln jest ciągła.

4. Funkcja $x \mapsto (\operatorname{sgn} x)^2$ nie jest ciągła w punkcie 0, ponieważ

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sgn} x)^2 = 1 \neq 0 = (\operatorname{sgn} 0)^2.$$

5. Funkcja $x \mapsto [x]$ nie jest ciągła w dowolnym punkcie $n \in \mathbb{Z}$ ponieważ nie posiada granicy w takim punkcie.

Twierdzenie 6.2. *Jeśli funkcje $f : D_1 \to D_2$ oraz $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ($D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$) są ciągłe, to ich złożenie $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ jest też ciągłe.*

Dowód. Niech x_0 będzie dowolnym elementem D_1 oraz niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w D_1 takim, że $x_n \to x_0$. Pokażemy, że $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. Z ciągłości funkcji f w x_0 mamy $f(x_n) \to f(x_0)$. Ponieważ $f(x_n) \in D_2$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, z ciągłości funkcji g w punkcie $f(x_0) \in D_2$, otrzymujemy $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, co dowodzi ciągłości funkcji $g \circ f$ w punkcie x_0. $\square$

Ćwiczenie. Załóżmy, że funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Wówczas funkcje $|f|$, $\max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są ciągłe, gdzie $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$ oraz $\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

Definicja. Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłym*, gdy dla dowolnych $a, b \in D$ takich, że $a < b$ jeśli $a < c < b$, to $c \in D$.

Uwaga 15. Dowolny przedział (odcinek, półprosta i prosta) są zbiorami wypukłymi.

Twierdzenie 6.3. *Ciągły obraz dowolnego zbioru wypukłego jest wypukły.*

Dowód. Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem wypukłym oraz $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Pokażemy, że $f(D)$ jest zbiorem wypukłym. Niech $a, b \in f(D)$ oraz $a < b$. Wówczas istnieją $x \neq y \in D$ takie, że $f(x) = a$ oraz $f(y) = b$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $x < y$.

Niech $a < c < b$. Pokażemy, że $c \in f(D)$, tzn. istnieje $z_0 \in D$ takie, że $f(z_0) = c$. Niech

$$z_0 = \sup\{z \in [x, y] : f(z) \leqslant c\}.$$

Wówczas istnieje ciąg $\{z_n\}$ elementów z $[x, y]$ takich, że $f(z_n) \leqslant c$ oraz $z_n \to z_0$. Z ciągłości funkcji f mamy $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \leqslant c$. Ponadto, dla dowolnej liczby $z < z' \leqslant y$ mamy $f(z') > c$. Zatem $f(z_0 + 1/n) > c$ dla dostatecznie dużych n. Z ciągłości funkcji f otrzymujemy $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_0+1/n) \geqslant c$. Stąd $f(z_0) = c$. $\square$

Uwaga 16. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ posiada *własność Darboux* jeśli dla dowolnych $x < y \in D$ oraz $c \in [f(x), f(y)]$ istnieje $z \in D \cap [x, y]$ taki, że $f(z) = c$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że dowolna funkcja ciągła na odcinku posiada własność Darboux.

Wniosek 6.4. *Każda funkcja ciągła $f : [0, 1] \to [0, 1]$ posiada punkt stały, tzn. istnieje $x \in [0, 1]$ taki, że $f(x) = x$.*

Dowód. Rozważmy funkcję $g : [0,1] \to R$ daną wzorem $g(x) = f(x) - x$. Jest ona ciągła oraz $g(0) = f(x) \geqslant 0$ oraz $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 1 - 1 = 0$. Zatem $0 \in [g(0), g(1)]$. Z własności Darboux istnieje $x \in [0,1]$ taki, że $0 = g(x) = f(x) - x$, a zatem $f(x) = x$. □

Definicja. Mówimy, że funkcja $D \subset \mathbb{R}$ ograniczona, gdy

$$\exists_{m,M\in\mathbb{R}} \forall_{x\in D}\, m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

lub równoważnie

$$\exists_{M>0} \forall_{x\in D}\, |f(x)| \leqslant M,$$

Twierdzenie 6.5. *(Weierstrassa) Każda funkcja ciągła określona na odcinku domkniętym jest ograniczona oraz osiąga swoje kresy. Dokładniej, jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $x_m, x_M \in [a,b]$ takie, że*

$$f(x_m) = \inf f([a,b]) \text{ oraz } f(x_M) = \sup f([a,b]).$$

Dowód. Niech $\alpha = \inf f([a,b])$. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $y_n \in f([a,b])$ taki, że $\alpha \leqslant y_n < \alpha + 1/n$. Wówczas $y_n \to \alpha$. Ponadto istnieje ciąg $\{x_n\}$ elementów $[a,b]$ taki, że $f(x_n) = y_n$. Z twierdzenie Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{k_n}\}$ taki, że $x_{k_n} \to x_m$. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_m) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \alpha$, co należało udowodnić.

Istnienie x_M dowodzi się w sposób analogiczny. □

Wniosek 6.6. *Ciągły obraz odcinka domkniętego jest również przedziałem domkniętym.*

Dowód. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Niech $f(x_m) = \inf f([a,b])$ oraz $f(x_M) = \sup f([a,b])$. Stąd wynika, że $f([a,b]) \subset [f(x_m), f(x_M)]$. Jeśli $c \in [f(x_m), f(x_M)]$, to z własności Darboux istnieje $z \in [a,b]$ taki, że $c = f(z) \in f([a,b])$. Zatem pokazaliśmy, że $[f(x_m), f(x_M)] \subset f([a,b])$, a więc $[f(x_m), f(x_M)] = f([a,b])$. □

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest prawostronnie (lewostronnie) ciągła w punkcie $x_0 \in D$, jeśli

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right).$$

Przykład. Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \to [x] \in \mathbb{Z}$ jest prawostronnie ciągłe w każdym punkcie.

Definicja. Punkt $x_0 \in D$ nazywamy punktem *nieciągłości pierwszego rodzaju* funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdy istnieje granica prawostronna i lewostronna funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ lub $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$. Jeśli $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, to mówimy, że nieciągłość jest usuwalna. Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem nieciągłości funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ i nie jest to nieciągłość pierwszego rodzaju, to mówimy o nieciągłości drugiego rodzaju.

Przykład. 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma w 0 nieciągłość usuwalną.

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma w 0 nieciągłość drugiego rodzaju.

Twierdzenie 6.7. *Dowolna funkcja monotoniczna $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ posiada punkty nieciągłości tylko pierwszego rodzaju oraz jest ich co najwyżej przeliczalnie wiele.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f jest niemalejąca. Z twierdzenia 5.3 wiemy, że w każdy punkcie dziedziny f posiada granicę prawostronną i lewostronną. Wtedy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

dla dowolnego $x_0 \in D$, ponadto jeśli $x_0 < x_1$, to $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_1^-} f(x)$ (ćwiczenie). Załóżmy, że x_0 jest punktem nieciągłości f. Wtedy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

a zatem znajdziemy w nim liczbę wymierną $q(x_0)$. Jeśli ponadto x_1 jest innym punktem nieciągłości f, to odcinki

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right), \quad \left(\lim_{x \to x_1^-} f(x), \lim_{x \to x_1^+} f(x) \right)$$

są rozłączne. Stąd wynika, że $q(x_0) \neq q(x_1)$. W ten sposób skonstruowaliśmy funkcję różnowartościową ze zbioru punktów nieciągłości funkcji f do zbioru liczb wymierny, który jest przeliczalny. Zatem zbioru punktów nieciągłości funkcji f jest co najwyżej przeliczalny. $\square$

Twierdzenie 6.8. *Jeśli $f : [a, b] \to f([a, b])$ jest funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną, to jest odwracalna oraz jej funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f jest rosnąca. Z Wniosku 6.6 $f([a, b])$ jest odcinkiem domkniętym. Ścisła monotoniczność f implikuje jej różnowartościowość, więc $f : [a, b] \to f([a, b])$ jest odwracalna. Wówczas f^{-1} jest również rosnąca. Rzeczywiście, jeśli $y_1 < y_2$, to $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. W przeciwnym wypadku mamy $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, a stąd

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

i sprzeczność. Załóżmy, że f^{-1} nie jest ciągła, a $y_0 \in f([a, b])$ jest jej punktem nieciągłości. Niech

$$\alpha = \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) < \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = \beta.$$

Z ciągłości funkcji f mamy

$$f(\alpha) = \lim_{y \to y_0^-} f(f^{-1}(y)) = y_0 = \lim_{y \to y_0^+} f(f^{-1}(y)) = f(\beta),$$

co stoi w sprzeczności z założeniem, że f jest ściśle monotoniczna. Stąd f^{-1} jest również ciągła. □

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) jest *jednostajnie ciągła* jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in D} \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.9. *(Cantora) Każda funkcja ciągła określona na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Załóżmy, że nie jest jednostajnie ciągła. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieją $x_\delta, x'_\delta \in [a, b]$ takie, że $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ oraz $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon$. Podstawiając kolejno $\delta = 1/n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy dwa ciągi $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ elementów $[a, b]$ takie, że $|x_n - x'_n| < 1/n$ oraz $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg $x_{k_n} \to x_0 \in [a, b]$. Wówczas $x'_{k_n} = x_{k_n} + (x'_{k_n} - x_n) \to x_0 + 0 = x_0$ oraz z ciągłości f mamy $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ oraz $f(x'_{k_n}) \to f(x_0)$, a więc $f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n}) \to 0$, co stoi w sprzeczności z tym, że $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. □

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła. Przypuśćmy, że f jest jednostajnie ciągła. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, jeśli $|x - y| < \delta$, to $|x^2 - y^2| < 1$. Weźmy liczby $1/\delta$, $1/\delta + \delta/2$. Odległość pomiędzy nimi jest mniejsza od δ, a jednak

$$|(1/\delta + \delta/2)^2 - (1/\delta)^2| = (2/\delta + \delta/2)\delta/2 > 2/\delta \cdot \delta/2 = 1.$$

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) spełnia *warunek Lipschitza* (jest funkcją Lipschitza) ze stałą Lipschitza $L > 0$, gdy

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \text{ dla dowolnych } x, y \in D.$$

Uwaga 17. Każda funkcja Lipschitza jest funkcją jednostajnie ciągłą. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy wziąć $\delta = \varepsilon/L$.

Przykład. Funkcje sin, cos są Lipschitza ze stałą Lipschitza 1.

Ćwiczenie. Pokazać, że funkcja $[0, +\infty) \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, a nie spełnia warunku Lipschitza.

7 Pochodna funkcji

Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym lub otwartą półprostą lub prostą. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0, x \in D$. Niech $\Delta x = x - x_0$ ($x = x + \Delta x$). Wyrażenie postaci

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nazywać będziemy *ilorazem różnicowym.* Sens geometryczny ilorazu różnicowego to tangens kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x, f(x))$ do osi Ox.

Definicja. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

to nazywamy ją *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 oraz oznaczamy przez $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$. Jeśli pochodna funkcji f w punkcie x_0 istnieje, to mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.

Geometrycznie liczba $f'(x_0)$ interpretowana jest jako tangens kąta nachylenia stycznej w punkcie x_0 do wykresu funkcji f do osi Ox. Równanie stycznej ma wówczas postać

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Definicja. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna, to odwzorowanie $D \ni x \mapsto f'(x) \in R$ nazywamy *funkcją pochodną* funkcji f.

Uwaga 18. Wyrażenie $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nazywamy przyrostem wartości funkcji f odpowiadającym przyrostowi argumentu Δx. Natomiast wyrażenie

$df = f'(x_0)\Delta x$ nazywamy *różniczką* funkcji f odpowiadającą przyrostowi argumentu Δx. Różniczka jest liniowym przybliżeniem przyrostu funkcji. Dokładniej, jeśli $r(x_0, \Delta x) = \Delta f - df$, to $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{r(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0$. Rzeczywiście

$$\frac{r(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \to 0.$$

Twierdzenie 7.1. *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w pewnym punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem elementów dziedziny takim, że $x_n \neq x_0$ oraz $x_n \to x_0$. Wówczas

$$f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}(x_n - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Przykład. Twierdzenie odwrotne nie jest oczywiście prawdziwe. Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, lecz nie jest różniczkowalna w zerze, ponieważ

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

zatem granica ilorazów różnicowych nie istnieje.

Twierdzenie 7.2. *Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ przedział otwarty) są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$, to funkcje αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$ oraz f/g (jeśli $g'(x_0) \neq 0$) są różniczkowalne w x_0 oraz*

1. $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$;
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Dowód. Części 1. oraz 2. są proste do udowodnienia. Zatem zaczniemy od dowodu części 3. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) \to \\
&\to f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0),
\end{aligned}$$

gdy $x \to x_0$.

Ad 4.

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} = \\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x)}\left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\right) = \\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) \to \\
&\to \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},
\end{aligned}$$

gdy $x \to x_0$. □

Twierdzenie 7.3. *Niech $D, E \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi. Załóżmy, że funkcje $f : D \to E$ oraz $g : E \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne. Wówczas funkcja $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz dla dowolnego $x_0 \in D$ mamy*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dowód. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w $D \setminus \{x_0\}$ zbieżnym do x_0. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_n) \to f(x_0)$. Ponadto

$$\frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x_n-x_0} = \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Twierdzenie 7.4. *Niech $f : (a,b) \to (c,d)$ będzie funkcją różniczkowalną, odwracalną oraz $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Wówczas funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna oraz dla dowolnej liczby $y_0 \in (c,d)$ mamy*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc również f^{-1} jest ciągła. Niech $\{y_n\}$ będzie ciągiem w $(c,d) \setminus \{y_0\}$ takim, że $y_n \to y_0$. Wówczas z ciągłości f^{-1} mamy $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ oraz $f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0)$. Zatem jeśli $x_n = f^{-1}(y_n)$, to $x_n \to x_0$. Ponadto,

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

Przykład. 1. Niech $f(x) = x^m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \\ &= x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \ldots + x x_0^{m-2} + x_0^{m-1} \to m x_0^{m-1},\end{aligned}$$

gdy $x \to x_0$. Zatem $(x^m)' = mx^{m-1}$.

2. Niech $f(x) = \log_a x$, gdzie $0 < a \neq 1$. Wówczas dla dowolnego $x_0 > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{x_0}{\Delta x}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \to \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a},\end{aligned}$$

gdy $\Delta x \to 0$. Zatem $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, a w szczególności $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. Dla dowolnego $0 < a \neq 1$ rozważmy funkcję wykładniczą $x \mapsto a^x$, która jest odwrotną do $x \mapsto \log_a x$. Ponadto $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \neq 0$. Wtedy

$$(a^x)' = \frac{1}{\log'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \ln a,$$

w szczególności $(e^x)' = e^x$.

4. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ rozważmy funkcję $[0,+\infty) \ni x \mapsto x^a \in [0,+\infty)$. Wówczas $x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$. Jako złożenie funkcji różniczkowalnych jest ona różniczkowalna oraz

$$(x^a)' = e^{a \ln x} a (\ln x)' = x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

5. Rozważmy odwzorowanie $x \mapsto \sin x$. Wówczas dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)}{\Delta x} &= \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x_0+\frac{\Delta}{2})}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x_0+\frac{\Delta}{2}) \to 1\cdot\cos x_0,\end{aligned}$$

gdy $\Delta x \to 0$. Zatem $(\sin x)' = \cos x$. Analogicznie $(\cos x)' = -\sin x$ (ćwiczenie). Ponadto funkcja $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ jest funkcją różniczkowalną (jej dziedzina to $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$). Ponadto

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.\end{aligned}$$

Podobnie $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6. Funkcja $\sin : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$ jest odwracalna oraz $(\sin x)' = \cos x > 0$ dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Zatem jest odwrotna oznaczana przez $\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Podobnie funkcja odwrotna do $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ oznaczana przez $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ jest funkcją różniczkowalną oraz $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Funkcja $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ jest odwracalna oraz $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$. Zatem jest odwrotna oznaczana przez $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podobnie $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że punkt $x_0 \in D$ jest

- *minimum lokalnym* funkcji f, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$;

- *maksimum lokalnym* funkcji f, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Minima i maksima lokalne funkcji będziemy nazywać *ekstremami lokalnymi.*

Twierdzenie 7.5. *(warunek konieczny ekstremum) Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Jeśli $x_0 \in (a, b)$ jest ekstremum funkcji f, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f osiąga w x_0 maksimum lokalne. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ dla dowolnego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Funkcja f jest różniczkowalna, a zatem

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ oraz } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Stąd

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

a więc $f'(x_0) = 0$. □

Twierdzenie 7.6. *(Rolle'a) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która jest różniczkowalna na (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Jeśli f jest stała, to pochodna w każdym punkcie jest równa zero. Jeśli f nie jest stała to z twierdzenia 6.5 (Weierstrassa) wynika, że wewnątrz przedziału f ma ekstremum. Z twierdzenie 7.5 pochodna w tym punkcie jest zero. □

Twierdzenie 7.7. *(Lagrange'a) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która jest różniczkowalna na (a, b). Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Jest ona ciągła i różniczkowalna na (a, b), a ponadto

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dodatkowo,

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b).$$

Z twierdzenia Rolle'a istnieje $c \in (a,b)$ taki, że

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Twierdzenie 7.8. *(Cauchy'ego) Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcjami ciągłymi, które są różniczkowalne na (a,b). Załóżmy, że $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Wówczas istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Jest ona ciągła i różniczkowalna na (a,b), a ponadto

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Dodatkowo,

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0,$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0.$$

Z twierdzenia Rolle'a istnieje $c \in (a,b)$ taki, że

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Wówczas

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Uwaga 19. Załóżmy, że $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Jeśli f jest niemalejąca, to $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, a zatem $f'(x_0) \geqslant 0$ dla dowolnego $x_0 \in (a,b)$. Podobnie jeśli f jest nierosnąca, to f' jest niedodatnia.

Twierdzenie 7.9. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną na (a,b).*

1. *Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest stała.*
2. *Jeśli $f'(x) > 0$ ($\geqslant 0$) dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest rosnąca (niemalejąca).*
3. *Jeśli $f'(x) < 0$ ($\leqslant 0$) dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest malejąca (nierosnąca).*

Dowód. Niech $x, y \in (a,b)$ oraz $x < y$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $c \in (x,y)$ taki, że $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. Jeśli $f' \equiv 0$, to $f(x) = f(y)$, a zatem f jest stała. Jeśli $f' > 0$, to $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) > 0$, a zatem f jest rosnąca, itd. □

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Jeśli $f' : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to mówimy, że f jest *dwukrotnie różniczkowalna*, zaś pochodną funkcji f' oznaczmy przez f'' i nazywamy *drugą pochodną* lub *pochodną drugiego rzędu*. Ogólnie n–ta pochodna $f^{(n)}$ (jeśli istnieje) jest pochodną $n-1$–ej pochodnej $f^{(n-1)}$. Jeśli n–ta pochodna funkcji f istnieje, to mówimy, że f jest *n–krotnie różniczkowalna*. Jeśli dodatkowo $f^{(n)}$ jest ciągła, to mówimy, że f jest *n–krotnie różniczkowalna w sposób ciągły* lub jest *klasy C^n*. f jest n–krotnie różniczkowalna dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że f jest *klasy C^∞*.

Twierdzenie 7.10. *(warunki dostateczne istnienia ekstremum) Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $x_0 \in (a,b)$ spełnia $f'(x_0) = 0$.*

- *Jeśli f' zmienia znak w x_0, to f ma ekstremum w x_0. Dokładniej, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f'(x) > 0 (< 0)$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0 (> 0)$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma maksimum (minimum) w x_0.*
- *Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x_0) \neq 0$, to f ma ekstremum w x_0. Dokładniej, jeśli $f''(x_0) < 0 (> 0)$, to f ma maksimum (minimum) w x_0.*

Dowód. Załóżmy, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Z poprzedniego lematu $f : (x_0 - \delta, x_0] \to \mathbb{R}$ jest rosnąca, zaś $f : [x_0, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ jest malejąca. Zatem jeśli $x \in (x_0 - \delta, x_0]$, to $f(x) < f(x_0)$ oraz jeśli $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, to również $f(x) < f(x_0)$, a zatem f ma maksimum lokalne w x_0.

Załóżmy, że $f''(x_0) < 0$. Ponieważ $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < f''(x_0)/2 < 0 \text{ dla } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Stąd dla $x < x_0$ otrzymujemy $f'(x) - f'(x_0) > 0$, zaś dla $x > x_0$ otrzymujemy $f'(x) - f'(x_0) < 0$. Zatem z pierwszej części twierdzenia otrzymujemy, że f ma maksimum lokalne w x_0. □

Stwierdzenie 7.11. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną na (a, b). Załóżmy, że $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ograniczona. Wówczas f jest Lipschitza ze stałą $L = \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|$.*

Dowód. Niech $x, y \in [a, b]$ oraz $x < y$. Wówczas z twierdzenia Lagrange'a istnieje $x < c < y$ taka, że $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Stąd

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leqslant L|y - x|.$$

□

Wniosek 7.12. *Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to dla dowolnych $a < b$ funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją Lipschitza.*

Dowód. Ponieważ $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc z twierdzenia Weierstrassa jest ona ograniczony, a zatem możemy zastosować poprzednie stwierdzenie. □

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem. Powiemy, że funkcja f jest

- *wypukła*, gdy dla dowolnych $x, y \in D$ oraz $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ zachodzi nierówność
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y);$$
- *wklęsła*, gdy dla dowolnych $x, y \in D$ oraz $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ zachodzi nierówność
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lemat 7.13. *Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a < b < c$ z dziedziny zachodzi nierówność*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \tag{4}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Ponieważ $a < b < c$, więc $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$, gdzie $\lambda = \frac{c-b}{c-a}$. Ponieważ $0 < \lambda < 1$, więc z wypukłości f mamy

$$f(b) = f(\lambda a + (1 - \lambda)c) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(c) = \frac{c - b}{c - a} f(a) + \frac{b - a}{c - a} f(c),$$

stąd

$$(c - b)f(b) + (b - a)f(b) = (c - a)f(b) \leqslant (c - b)f(a) + (b - a)f(c),$$

a zatem

$$(c - b)(f(b) - f(a)) \leqslant (b - a)(f(c) - f(b)).$$

($\Leftarrow$) Niech $x < y$ oraz $0 < \lambda < 1$. Korzystając z (4) dla $a = x$, $c = y$ oraz $b = \lambda x + (1-\lambda)y$ otrzymujemy

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{y - \lambda x + (1-\lambda)y},$$

stąd

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leqslant \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)},$$

a więc

$$\lambda(f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)) \leqslant (1-\lambda)(f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)),$$

a w końcu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

□

Twierdzenie 7.14. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ (D przedział otwarty) będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f' : D \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $x_0 < y_0$. Następnie weźmy $x_0 < x < y < y_0$. Korzystając z (4) dla trójek $x_0 < x < y$ oraz $x < y < y_0$ otrzymujemy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ oraz } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y_0) - f(y)}{y_0 - y},$$

a zatem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0},$$

stąd

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0).$$

($\Leftarrow$) Wystarczy pokazać, że (4) zachodzi dla dowolnych $a < b < c$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieją $a < d < b < e < c$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(d) \text{ oraz } \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(e).$$

Ponadto, ponieważ f' jest niemalejąca mamy $f'(d) \leqslant f'(e)$, co implikuje (4). □

Wniosek 7.15. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Wówczas f jest*

- *wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in D$;*
- *wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \leqslant 0$ dla wszystkich $x \in D$.*

Dowód. Wiemy, że funkcja jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Korzystając z tego faktu dla funkcji f' otrzymujemy, że f' niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy f'' jest nieujemna, co w połączeniu z poprzednim twierdzeniem daje pierwszą część wniosku.

Druga część wynika z faktu, że f jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $-f$ jest wypukła. $\square$

Definicja. Punkt $x_0 \in D$ jest *punktem przegięcia* funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że w $(x_0 - \delta, x_0)$ funkcja f jest wklęsła, a w $(x_0, x_0 + \delta)$ funkcja f jest wypukła, albo odwrotnie.

Twierdzenie 7.16. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Jeśli $f''(x_0) = 0$ oraz f'' zmienia znak w punkcie x_0, to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.*

Definicja. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie D jest sumą otwartych przedziałów.

- Załóżmy, że $x_0 \in D^d$. Prosta $x = x_0$ jest *asymptotą pionową* f, gdy
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ lub } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$
- Załóżmy, że $\pm\infty \in D^d$. Prosta $y = y_0$ jest *asymptotą poziomą* f, gdy
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ lub } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$
- Załóżmy, że $\pm\infty \in D^d$. Prosta $y = ax + b$ jest *asymptotą ukośną* f, gdy $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Wtedy
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$
lub
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Badanie przebiegu zmienności funkcji:

1. Badamy własności funkcji wynikające z jej wzoru:
    - dziedzinę funkcji,

- ciągłość funkcji,
- miejsca przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych,
- granice funkcji na krańcach przedziałów określoności,
- asymptoty funkcji.

2. Badamy własności funkcji wynikające z jej pierwszej i drugiej pochodnej:
   - monotoniczność, tzn. przedziały stałego zanku pochodnej,
   - ekstrema,
   - wypukłość i wklęsłość funkcji, tzn. przedziały stałego znaku drugiej pochodnej,
   - punkty przegięcia.
3. Sporządzamy tabelkę zmienności funkcji.
4. Szkicujemy wykres funkcji

Twierdzenie 7.17 (reguła de l'Hospitala)**.** *Niech* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *(*$a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *) będą funkcjami klasy* C^1*. Załóżmy, że dla* $x_0 \in \{a, b\}$*,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \ \textit{lub} \ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Jeśli

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \ \textit{to} \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko w przypadku, gdy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. W przepadku, gdy granice są $\pm\infty$ dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia Stolza.

Rozszerzmy dziedzinę (a, b) funkcji f, g o punkt x_0, kładąc $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Wówczas rozszerzona funkcja jest ciągła. Rozważmy ciąg $\{x_n\}$ w $(a, b) \setminus \{x_0\}$ taki, że $x_n \to x_0$. Musimy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = c.$$

Ponieważ $f, g : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz różniczkowalne na (x_0, x_n), więc z twierdzenia Cauchy'ego istnieje $y_n \in (x_0, x_n)$ take, że

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $y_n \to x_0$, a stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

□

7.1 Wzór Taylora

Niech f będzie funkcją wielomianową postaci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

wówczas

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1} \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2} \\ f^{(3)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_3 x + \ldots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot na_n. \end{aligned}$$

Wstawiając we wszystkich wzorach 0 w miejsce x otrzymujemy, że

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}, \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Zatem

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Niech g będzie również funkcją wielomianową postaci $g(x) = f(x + x_0)$. Wówczas $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x + x_0)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x - x_0) \\ &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{g''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Lemat 7.18. *Niech $r : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n–krotnie różniczkowalną oraz $x_0 \in (a, b)$. Wówczas jeśli $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = 0$, to*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

co w skrócie oznaczamy $r(x) = o((x - x_n)^n)$.

Dowód. Dowód lematu przeprowadzimy indukcyjnie.

1^o. Niech $n = 1$. Musimy pokazać, że jeśli $r(x_0) = r'(x_0) = 0$, to $\frac{r(x)}{x-x_0} \to 0$. Ale

$$\frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0} \to r'(x_0) = 0.$$

2^o. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej k. Pokażemy, że jest on również prawdziwy dla $k+1$. Niech r będzie funkcją $k+1$–krotnie różniczkowalną oraz $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(k)}(x_0) = r^{(k+1)}(x_0) = 0$. Musimy pokazać, że

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = 0.$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem w $D \setminus \{x_0\}$ taki, że $x_n \to x_0$. Z twierdzenia Lagrange'a dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $0 < \theta_n < 1$ taka, że

$$\frac{r(x_n)}{x_n-x_0} = \frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0} = r'(x_0+\theta_n(x_n-x_0)).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{r(x_n)}{(x_n-x_0)^{k+1}} &= \frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0}\frac{1}{(x_n-x_0)^k} = \frac{r'(x_0+\theta_n(x_n-x_0))}{(x_n-x_0)^k} = \\ &= \frac{r'(y_n)}{(y_n-x_0)^k}\cdot\theta_n^n, \text{ gdzie } y_n = x_0+\theta_n(x_n-x_0).\end{aligned}$$

Ponieważ y_n leży pomiędzy x_0 oraz x_n, więc z twierdzenia o trzech ciągach $y_n \to x_0$. Ponadto funkcja r' jest k–krotnie różniczkowalna i $r'(x_0) = \ldots = r^{(k)}(x_0) = r^{(k+1)}(x_0) = 0$. Zatem z założenia indukcyjnego $\frac{r'(y_n)}{(y_n-x_0)^k} \to 0$. Ponadto $0 < \theta_n^n < 1$, więc

$$\frac{r(x_n)}{(x_n-x_0)^{k+1}} = \frac{r'(y_n)}{(y_n-x_0)^k}\cdot\theta_n^n \to 0.$$

□

Twierdzenie 7.19. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n–krotnie różniczkowalną oraz $x_0 \in (a,b)$. Wówczas jeśli*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

to

$$r_n(x) = o((x-x_n)^n), \ \textit{tzn.} \lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Dowód. Niech g będzie funkcja wielomianową postaci

$$g(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $g^{(k)}(0) = k!a_k = f^{(k)}(x_0)$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$. Ponadto $r_n(x) = f(x) - g(x - x_0)$, a zatem $r_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x - x_0)$, więc $r_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(0) = 0$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$. Z poprzedniego lematu otrzymujemy, że $r_n(x) = o((x - x_n)^n)$. □

Stwierdzenie 7.20. *Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞, $x_0 \in (a, b)$ oraz dla dowolnego $x \in (a, b)$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,$$

to dla dowolnego $x \in (a, b)$ zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Dowód. n-ta suma częściowa szeregu wyraża się wzorem

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) - r_n(x) \to f(x).$$

□

Powyższy szereg nosi nazwę *szeregu Taylora*. W przypadku, gdy $x_0 = 0$ mówimy o *szeregu Maclaurina*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Twierdzenie 7.21. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $n+1$–krotnie różniczkowalną oraz $x_0 \in (a, b)$ oraz $h > 0$. Wówczas jeśli*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r_n(x_0, h),$$

to istnieją liczby $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$ takie, że

$$r_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n + 1)!}h^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)}{n!}(1 - \theta')^n h^{n+1}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję pomocniczą $g_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$g_n(x) = f(x_0+h) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x_0+h-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_0+h-x)^n.$$

Ponieważ f jest $n+1$–krotnie różniczkowalna, więc g_n jest różniczkowalna oraz

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= -f'(x) - \left[\frac{f''(x)}{1!}(x_0+h-x) - \frac{f'(x)}{1!}\right] \\ &\quad - \left[\frac{f'''(x)}{2!}(x_0+h-x) - \frac{f''(x)}{2!}2(x_0+h-x)\right] \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0+h-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}n(x_0+h-x)^{n-1}\right] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0+h-x)^n. \end{aligned}$$

Ponadto

$$g_n(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = r_n(x_0,h)$$

oraz $g_n(x_0+h) = 0$. Z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji g_n istnieje $0 < \theta' < 1$ taka, że

$$\begin{aligned} -\frac{r_n(x_0,h)}{h} &= \frac{g_n(x_0+h) - g_n(x_0)}{h} = g_n'(x_0+\theta' h) = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta' h)}{n!}(x_0+h-x_0-\theta' h)^n = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta' h)}{n!}(1-\theta')h^n, \end{aligned}$$

a zatem

$$r_n(x_0,h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta' h)}{n!}(1-\theta')h^{n+1}.$$

Żeby udowodnić pierwszą część formuły skorzystamy z twierdzenia Cauchy'ego dla funkcji g_n i $u_n(x) = (x_0+h-x)^{n+1}$. Zauważmy, że $u_n(x_0+h) - u_n(x_0) = -h^{n+1}$ oraz $u_n'(x) = -(n+1)(x_0+h-x)^n$. Z twierdzenia Cauchy'ego istnieje $0 < \theta < 1$ taka, że

$$\begin{aligned} \frac{r_n(x_0,h)}{h^n} &= \frac{g_n(x_0+h) - g_n(x_0)}{u_n(x_0+h) - u_n(x_0)} = \frac{g_n'(x_0+\theta h)}{u_n'(x_0+\theta h)} = \\ &= \frac{-\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{n!}(x_0+h-x_0-\theta h)^n}{-(n+1)(x_0+h-x_0-\theta h)^n} = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

a zatem

$$r_n(x_0,h)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

$\square$

Przykład. 1. Rozważmy funkcję $f(x)=e^x$. Rozwińmy tę funkcję w szereg Maclaurina. Wiemy, że $f^{(n)}(x)=e^x$, a zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Z kryterium D'Alamberta szereg ten jest zbieżny dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$, stąd $\frac{x^n}{n!}\to 0$. Ponadto

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie $0<\theta<1$. Zatem

$$0<|r_n(x)|\leqslant e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,$$

z twierdzenia o trzech ciągach $r_n(x)\to 0$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$, a więc

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Teraz możemy też udowodnić, że e nie jest liczbą wymierną. Załóżmy, że $e=m/n$, gdzie $m,n\in\mathbb{N}$ oraz $n\geqslant 2$. Wówczas

$$\frac{m}{n}=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!},$$

gdzie $0<\theta<1$. Mnożąc obustronnie przez $n!$ otrzymujemy

$$m(n-1)!=n!+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n+3\cdot\ldots\cdot n+\ldots+1+\frac{e^\theta}{n+1},$$

a zatem $0<\frac{e^\theta}{n+1}<\frac{e}{n+1}<\frac{3}{n+1}\leqslant 1$ jest liczbą całkowitą, co nie jest możliwe.

Wyznaczmy teraz e z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku. Wiemy, że

$$\frac{1}{3!}=0,16667-\varepsilon_3,\ \frac{1}{4!}=0,04167-\varepsilon_4,\ \frac{1}{5!}=0,00833+\varepsilon_5,$$

$$\frac{1}{6!} = 0,00139 - \varepsilon_6, \ \frac{1}{7!} = 0,00020 - \varepsilon_7,$$

gdzie $0 < \varepsilon_i < \frac{1}{2\cdot 10^5}$ dla $i = 3, \ldots, 7$. Zatem

$$\begin{aligned} e &< 2,5 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{3}{7!} \\ &< 2,5000 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 + \varepsilon_5 + 0,00139 + 0,00060 \\ &< 2,71866 + 0,000005 < 2,71867. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &> 2,5 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &> 2,5000 + 0,16667 - \varepsilon_3 + 0,04167 - \varepsilon_4 + 0,00833 \\ &\quad +0,00139 - \varepsilon_6 + 0,00020 - \varepsilon_7 \\ &> 2,71826 - 0,00002 \geqslant 2,71824. \end{aligned}$$

Zatem $e \approx 2,718$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

2. Rozważmy funkcją $f(x) = \ln(1+x)$ na $(-1, +\infty)$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

a zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Ponadto

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)},$$

gdzie $0 < \theta < 1$. Załóżmy, że $-1 < x \leqslant 1$. Wówczas

$$|r_n(x)| \leqslant \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \max\left(\frac{1}{1+x}, 1 \right) \to 0.$$

Stąd dla $-1 < x \leqslant 1$ zachodzi równość

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

a w szczególności

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

3. Podobnie można (ćwiczenie) udowodnić, że

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

4. Nie każda funkcja klasy C^∞ jest równa swojemu szeregowi Maclaurina, nawet jeśli jest on zbieżny. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0. \end{cases}$$

Funkcja ta (ćwiczenie) jest klasy C^∞ oraz $f^{(n)}(0) = 0$ dla dowolnego $n \geqslant 0$. Zatem suma szereg Maclaurina jest równa zero.

Twierdzenie 7.22. *(warunek dostateczny istnienia ekstremum) Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n–krotnie różniczkowalną, gdzie n jest liczbą parzystą oraz $x_0 \in (a,b)$. Jeśli*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \textit{ oraz } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

to f ma ekstremum w x_0. Dodatkowo, jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$ to jest to minimum, zaś jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$ to jest to maximum lokalne funkcji f.

Dowód. Załóżmy, że $f^{(n)}(x_0) > 0$. Niech $r(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Wówczas

$$r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n-1)}(x_0) = r^{(n)}(x_0) = 0,$$

Z lematu 7.18 mamy $r(x) = o((x-x_n)^n)$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} > -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

dla $0 < |x - x_0| < \delta$. Stąd dla $0 < |x - x_0| < \delta$ otrzymujemy

$$f(x) = f(x_0) + r(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > f(x_0),$$

a więc w x_0 funkcja f ma minimum lokalne. $\square$

7.2 Przybliżone rozwiązywanie równań

Przedstawimy teraz metodę rozwiązywania równań zwaną *metodą stycznych* lub *metodą Newtona*.

Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, jej pochodne f', f'' zachowują znak oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ponieważ f jest ściśle monotoniczna, więc istnieje jedyne rozwiązanie równania $f(x) = 0$, oznaczmy je przez η.

Aby otrzymać dobre przybliżenie numeryczne liczby η postępujemy następująco. Przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ przeprowadzamy styczne do wykresu. Jedna z nich przecina oś Ox w przedziale $[a, b]$. Załóżmy, że $f(a)f''(a) > 0$, wtedy styczna przechodząca przez $(a, f(a))$ jest postaci $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ i przecina oś w punkcie $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Ponieważ zawsze $\frac{f(a)}{f'(a)} < 0$, więc $a < x_1$. Ponadto $x_1 < \eta$. Rzeczywiści z twierdzenia Lagrange'a istnieje $a < c < \eta$ taka, że

$$-\frac{f(a)}{\eta - a} = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} = f'(c)$$

oraz $a < d < c$ taka, że

$$\frac{f'(c) - f'(a)}{f'(a)} = \frac{f''(d)}{f'(a)}(c - a) = \frac{f''(d)}{f''(a)} \frac{f''(a)}{f(a)} \frac{f(a)}{f'(a)}(c - a) < 0.$$

Stąd

$$-\frac{f(a)}{f'(a)(\eta - a)} = \frac{f'(c)}{f'(a)} < 1,$$

więc

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} < a + (\eta - a) = \eta.$$

Wtedy x_1 jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania. Aby otrzymać następne przybliżenie metodę stycznych stosujemy na przedziale $[x_1, b]$ i znajdujemy drugie przybliżenie

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Kontynuując metodę stycznych otrzymujemy ciąg $\{x_n\}$ dany wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 = a.$$

Ponadto $x_n < x_{n+1} < \eta$. Ponieważ $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony, więc jest zbieżny do $\overline{x} \in [a, b]$. Ponadto przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy, że

$$\overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})},$$

a zatem $f(\overline{x}) = 0$, więc $\overline{x} = \eta$.

Aby oszacować błąd $x_n - \eta$ korzystamy ponownie z twierdzenia Lagrange'a. Istnieje zatem $x_n < c < \eta$ taka, że

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\eta) = f'(c)(x_n - \eta).$$

Stąd

$$|x_n - \eta| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(c)|} \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \text{ gdzie } m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

W przypadku, gdy $f(b)f''(b) > 0$ zaczynamy od punktu b.

Przykład. Obliczmy z dokładnością $0,001$ pierwiastek równania

$$x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

w przedziale $[2,3]$. Niech $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$. Ponieważ $f(2) = -3$ oraz $f(3) = 7$, więc równanie posiada pierwiastek w $[2,3]$. Ponadto, dla $x \in [2,3]$ mamy

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 4 > 0 \text{ oraz } f''(x) = 6x - 2 > 0.$$

Ponieważ $f''(3)f(3) > 0$, więc metoda Newtona startuje od $x_0 = 3$. Ponadto, $m = \min_{x\in[2,3]} |f'(x)| = f'(2) = 4$. Wtedy

$$\begin{aligned} x_1 = &\ 3 - \tfrac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \tfrac{7}{17} \approx 2,5882, && f(x_1) = 1,287,\\ x_2 = &\ x_1 - \tfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 2,4704, && f(x_2) = 0,092,\\ x_3 = &\ x_2 - \tfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 2,4606, && f(x_2) = 0,0009. \end{aligned}$$

Stąd $|x_3 - \eta| < 0,0009/4 < 0,001$, a więc $\eta \approx 2,4606$ z dokładnością $0,001$.

8 Całka nieoznaczona

Definicja. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Każdą funkcję różniczkowalną $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in (a,b)$$

nazywamy *funkcja pierwotną* funkcji f lub *całką nieoznaczoną* funkcji f. Funkcję pierwotną funkcji f oznaczmy przez

$$\int f(x)\,dx.$$

Funkcja pierwotna nie jest określona jednoznacznie. Jeśli F jest funkcja pierwotną funkcji f, to dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $F + c$ jest tez funkcją pierwotną dla f. Odwrotnie, jeśli F_1, F_2 są funkcjami pierwotnymi dla f, to różnią się o stałą. Istotnie, jeśli $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, to

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ dla } x \in (a, b),$$

a zatem G jest stała, tzn. istnieje $c \in \mathbb{R}$ taka, że $G(x) = c$ dla $x \in (a, b)$. Stąd $F_1 = F_2 + c$.

W dalszej części wykładu pokażemy, że funkcje ciągłe posiadają funkcje pierwotne.

Wprost ze znanych wzorów z rachunku różniczkowego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha\,dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ dla } \alpha \neq 0,\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C,\\
\int a^x\,dx &= a^x \ln a + C \text{ dla } a < 0 \neq 1,\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C,\\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C,\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \operatorname{tg} x + C,\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\operatorname{ctg} x + C,\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arctg} x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 8.1. *Jeśli funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ posiadają funkcje pierwotne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $af + bg$ posiada funkcję pierwotną oraz*

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx.$$

Dowód. Niech $F = \int f(x)\,dx$ oraz $G = \int f(x)\,dx$, tzn. $F' = f$ oraz $G' = g$. Wówczas $(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$, a zatem $aF + bG$ jest funkcją pierwotną funkcji $af + bg$. □

Twierdzenie 8.2. *(o całkowaniu przez części) Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi takimi, że $f'g$ posiada funkcję pierwotną. Wówczas fg' posiada* *funkcję pierwotną oraz*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Dowód. Niech H będzie funkcją pierwotną dla $f'g$, tzn. $H(x) = \int f'(x)g(x)\,dx$. Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu mamy $(fg)' = f'g + fg'$. Zatem

$$\begin{aligned} f(x)g'(x) &= (f(x)g(x))' - f'(x)g(x) = \\ &= (f(x)g(x))' - H'(x) = (f(x)g(x) - H(x))', \end{aligned}$$

a więc $f(x)g(x) - H(x)$ jest funkcją pierwotna dla fg' oraz

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - H(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

□

Przykład. Obliczmy całkę $\int x\cos x\,dx$. Niech $g(x) = \sin x$ oraz $f(x) = x$. Wówczas $g'(x) = \cos x$ oraz $f'(x) = 1$. Zatem korzystając ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x\cos x\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx = \\ &= x\sin x - \int 1\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.3. *(o całkowaniu przez podstawianie) Jeśli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną F oraz $\varphi : (c,d) \to (a,b)$ jest różniczkowalna, to $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ ma funkcję pierwotną równą $F \circ \varphi$, tzn.*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy,$$

gdzie $y = \varphi(x)$.

Dowód. Z twierdzenia o pochodnej złożenia funkcji mamy

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

a zatem

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)).$$

□

Przykład. 1. Obliczmy całkę $\int \frac{1}{2x+3}dx$. Niech $f(y) = \frac{1}{y}$ oraz $\varphi(x) = 2x+3$. Zatem $\varphi'(x) = 2$ oraz z twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie mamy

$$\int \frac{1}{2x+3} 2\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C,$$

gdzie $y = 2x+3$, a stąd $\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$. W praktyce obliczenia wykonujemy następująco: stosujemy podstawienie $y = 2x+3$, wtedy $dy = (2x+3)'dx = 2dx$, a więc $dx = \frac{1}{2}dy$. Wstawmy teraz y zamiast $2x+3$ oraz $\frac{1}{2}dy$ zamiast dx. Dostajemy

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \int \frac{1}{2y}dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$$

2. Obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \left|\begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{dx}{a}\end{array}\right| = \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

3. Dla $n \geqslant 2$ obliczmy całkę

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx.\end{aligned}$$

Do drugiej całki stosujemy metodę całkowania przez części biorąc $g(x) = x/2$ oraz $f'(x) = 2x/(1+x^2)^n$. Wyznaczmy

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{2x}{(x^2+1)^n}dx = \left|\begin{array}{c} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx\end{array}\right| = \\ &= \int \frac{1}{y^n}dy = \frac{y^{1-n}}{1-n} = \frac{-1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \int \frac{x}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx = \\ &= I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}dx = \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-2}I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} = \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}.\end{aligned}$$

8.1 Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie funkcji wymiernych (ilorazów wielomianów) można sprowadzić do całkowania tzw. *ułamków prostych* postaci:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ oraz } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie trójmian kwadratowy x^2+px+q nie ma pierwiastków rzeczywistych, a więc $\Delta = p^2-4q<0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^n}dx &= \left| \begin{array}{c} y=x-a \\ dy=dx \end{array} \right| = \int \frac{A}{y^n}dy = \\ &= \begin{cases} A\ln|x-a|+C, & \text{gdy} \quad n=1, \\ \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C, & \text{gdy} \quad n>1. \end{cases}\end{aligned}$$

Całkę drugiego ułamka prostego zapisujemy w postaci sumy

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Ponadto

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = \left| \begin{array}{c} y=x^2+px+q \\ dy=(2x+p)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y^n}.$$

Aby obliczyć drugą całkę przedstawmy trójmian w postaci kanonicznej, tzn.

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} &= \left| \begin{array}{c} \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}t = x+\frac{p}{2} \\ \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}dt = dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\sqrt{-\frac{\Delta}{4}}dt}{(-\frac{\Delta}{4}t^2-\frac{\Delta}{4})^n} = \left(-\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.\end{aligned}$$

Niech $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są pewnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Możemy przyjąć, że stopień P ($\deg(P)$) jest mniejszy o stopnia Q ($\deg Q$). W przeciwnym przypadku dzielimy P przez Q z resztą, tzn.

$$P(x)=W(x)Q(x)+R(x), \text{ gdzie } \deg(R)<\deg(Q).$$

Wówczas

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

i całkę f można obliczyć całkując funkcje wielomianową W oraz funkcje wymierną $\frac{R}{Q}$.

Z podstawowego twierdzenia algebry

$$Q(x) = c(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}, \qquad (5)$$

przy czym trójmiany kwadratowe $x^2+p_ix+q_i$ nie mają pierwiastków rzeczywistych, dwumiany $x-a_1,\dots,x-a_m$ są parami różne oraz trójmiany $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_nx+q_n$ są parami różne.

Twierdzenie 8.4. *(o rozkładzie na ułamki proste) Jeśli $f=\frac{P}{Q}$ jest funkcją wymierną taką, że wielomian Q jest postaci (5) oraz $\deg(P)<\deg(Q)$, to istnieją stałe $A_{i,k}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant k_i$, oraz $B_{j,l}$, $C_{j,l}$ $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant l_j$, takie, że*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{A_{i,k}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_j}\frac{B_{j,l}x+C_{j,l}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}.$$

8.2 Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

$Q(x,y)$ jest wielomianem dwóch zmiennych, gdy

$$Q(x,y)=\sum_{(i,j)\in A}a_{i,j}x^iy^j,\ \text{gdzie } A\subset\mathbb{N}^2 \text{ jest zbiorem ograniczonym.}$$

Niech $R(x,y)$ będzie ilorazem wielomianów dwóch zmiennych.

1. Rozważmy całkę

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ \text{gdzie } ad-bc\neq 0.$$

Przykład.

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}.$$

Zastosujmy podstawienie

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Wówczas

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,\ \text{a stąd } x=\frac{bt^n-d}{a-ct^n},\ \text{oraz } dx=g(t)dt,$$

gdzie g jest funkcją wymierną. Zatem

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{bt^n - d}{a - ct^n}, t\right) g(t)\, dt,$$

oraz policzenie tej całki sprowadza się do obliczenia całki pewnej funkcji wielomianowej.

2. Rozważmy całkę

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ oraz } \Delta \neq 0.$$

Przykład.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$$

W tym przypadku stosujemy jedno z trzech tzw. *podstawień Eulera*:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= \pm\sqrt{a}x + t, && \text{gdy} \quad a > 0, \\ \sqrt{ax^2+bx+c} &= xt \pm \sqrt{c}, && \text{gdy} \quad c > 0, \\ \sqrt{c(x-x_1)(x-x_2)} &= (x-x_1)t, && \text{gdy} \quad \Delta > 0. \end{aligned}$$

Skorzystanie z tych podstawień doprowadza znowu do całki funkcji wymiernej.

3. Rozważmy całkę

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Przykład.

$$\int \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x + 1} dx.$$

W tym przypadku możemy zastosować podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Wtedy

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1}{t^2+1},$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{t^2}{t^2+1},$$

a zatem

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ponieważ $x = 2 \operatorname{arctg} t$, więc $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, a zatem

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt,$$

a to już jest całka funkcji wymiernej.

Jeśli funkcja R spełnia pewne dodatkowe własności, to warto stosować inne podstawienia:

$$\begin{aligned} t &= \cos x, \quad \text{gdy} \quad R(-u,v) = -R(u,v), \\ t &= \sin x, \quad \text{gdy} \quad R(u,-v) = -R(u,v), \\ t &= \operatorname{tg} x, \quad \text{gdy} \quad R(-u,-v) = R(u,v). \end{aligned}$$

Uwaga 20. Całki z pewnych stosunkowo prostych funkcji, np.

$$\int e^{-x^2}\, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

nie można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych

9 Całka Riemanna

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. *Podziałem* odcinka $[a,b]$ będziemy nazywać dowolny skończony ciąg punktów $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Podział ten będziemy oznaczać przez $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$ będziemy oznaczać przez $\Pi_{[a,b]}$.

Ustalmy $\kappa \in \Pi_{[a,b]}$. Niech $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Liczbę

$$\delta = \delta(\kappa) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

będziemy nazywać średnicą podziału κ. Niech

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Utwórzmy sumy

$$s(f,\kappa) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S(f,\kappa) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Liczbę $S(f,\kappa)$ nazywamy *sumą górną*, a $s(f,\kappa)$ *sumą dolną*. Oczywiście $s(f,\kappa) \leqslant S(f,\kappa)$.

Uwaga 21. Jeśli κ_1 jest podziałem drobniejszym niż κ_2, tzn. $\kappa_2 \subset \kappa_1$, to

$$S(f,\kappa_1) \leqslant S(f,\kappa_2) \text{ oraz } s(f,\kappa_2) \leqslant s(f,\kappa_1).$$

Zatem dla dowolnych dwóch podziałów $\kappa,\ \kappa' \in \Pi_{[a,b]}$ mamy

$$s(f,\kappa) \leqslant S(f,\kappa').$$

Istotnie, jeśli κ'' jest podziałem drobnieszym od obu $\kappa,\ \kappa'$, wtedy

$$s(f,\kappa) \leqslant s(f,\kappa'') \leqslant S(f,\kappa'') \leqslant S(f,\kappa').$$

Niech

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\kappa) : \kappa \in \Pi_{[a,b]}\} \text{ oraz } I^*(f) = \inf\{S(f,\kappa) : \kappa \in \Pi_{[a,b]}\}.$$

Liczbę $I_*(f)$ nazywamy *całką dolną*, a $I^*(f)$ nazywamy dolną *całką górną* funkcji f. Wówczas

$$I_*(f) \leqslant I^*(f).$$

Mówimy, że ciąg podziałów $\{\kappa_n\}$ jest normalny, gdy $\delta(\kappa_n) \to 0$.

Lemat 9.1. *Jeśli $\{\kappa_n\}$ jest normalnym ciągiem podziałów, to*

$$S(f,\kappa_n) \to I^*(f) \text{ oraz } s(f,\kappa_n) \to I_*(f).$$

Dowód. Niech M będzie ograniczeniem górnym, zaś m ograniczeniem dolnym funkcji f. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\kappa \in \Pi$ taki, że

$$I^*(f) + \varepsilon/2 > S(f,\kappa).$$

Niech $\kappa = \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$. Ponieważ $\{\kappa_n\}$ jest normalny, więc istnieje n_0 taka, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $\delta(\kappa_n) < \min(\varepsilon/(2k(M-m)), \delta)$, gdzie $\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant k} \Delta y_i$. Pokażemy, że wówczas

$$I^*(f) + \varepsilon > S(f,\kappa_n) \geqslant I^*(f),$$

co skończy dowód lematu.

Niech $\kappa' = \kappa \cup \kappa_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
S(f,\kappa_n) - S(f,\kappa') &= \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant l, x_i\in\kappa\setminus\kappa_n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1}-x_{i-1}) - \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_{i+1}-x_i) - \\
&\quad - \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1}-x_i)\Big) \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant l, x_i\in\kappa\setminus\kappa_n} (M(x_{i+1}-x_{i-1}) - m(x_{i+1}-x_i) - m(x_{i+1}-x_i))) \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant l, x_i\in\kappa\setminus\kappa_n} (M-m)(x_{i+1}-x_{i-1}) \leqslant k(M-m)\delta(\kappa_n) < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Stąd
$$S(f,\kappa_n) < S(f,\kappa') + \varepsilon/2 \leqslant S(f,\kappa) + \varepsilon/2 < I^*(f) + \varepsilon.$$
□

Definicja. Jeśli $I_*(f) = I^*(f)$, to mówimy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest *całkowalna w sensie Riemanna*, a liczbę $I_*(f) = I^*(f)$ nazywamy *całką Riemanna* lub *całką oznaczoną* i oznaczamy symbolem
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład. Niech $f(x) = c$ dla $x \in [a,b]$. Wówczas dla dowolnego podziału $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mamy
$$S(f,\kappa) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a)$$
oraz $s(f,\kappa) = c(b-a)$, a zatem $I_*(f) = I^*(f) = c(b-a)$. Stąd f jest całkowalna w sensie Riemanna, a jej całka wynosi $c(b-a)$.

Lemat 9.2. *Funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\kappa \in \Pi_{[a,b]}$ taki, że*
$$S(f,\kappa) - s(f,\kappa) < \varepsilon.$$

Dowód. ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że $I = I_*(f) = I^*(f)$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją podziały κ', κ'' takie, że
$$I - \varepsilon/2 < s(f,\kappa') \text{ oraz } I + \varepsilon/2 > S(f,\kappa'').$$
Niech $\kappa = \kappa' \cup \kappa''$. Wtedy
$$S(f,\kappa) - s(f,\kappa) \leqslant S(f,\kappa'') - s(f,\kappa') < I + \varepsilon/2 - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$
($\Longleftarrow$) Załóżmy, że
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\kappa\in\Pi_{[a,b]}}\ S(f,\kappa) - s(f,\kappa) < \varepsilon.$$
Wtedy
$$0 \leqslant I^*(f) - I_*(f) \leqslant S(f,\kappa) - s(f,\kappa) < \varepsilon$$
dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Stąd $I^*(f) - I_*(f) = 0$, więc f jest całkowalna w sensie Riemanna. □

Twierdzenie 9.3. *Dowolna funkcja ciągła $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest również jednostajnie ciągła, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/(2(b-a))$. Niech $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem o średnicy mniejszej niż δ. Ponieważ $x_i - x_{i-1} < \delta$, więc

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \\ &= \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} (f(x)-f(y)) \leqslant \varepsilon/(2(b-a)) \end{aligned}$$

dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$. Wtedy

$$\begin{aligned} S(f,\kappa) - s(f,\kappa) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon/(2(b-a)) \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon/(2(b-a))(b-a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem na podstawie poprzedniego lematu f jest całkowalna w sensie Riemanna. □

Przykład. Rozważmy funkcję $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ponieważ zbiory liczb wymiernych i niewymiernych są gęste w $\mathbb{R}$, więc dla dowolnego podziału κ mamy $S(f,\kappa) = 1$ oraz $s(f,\kappa) = 0$, a zatem $I_*(f) = 0$ oraz $I^*(f) = 1$. Stąd f nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 9.4. *Dowolna funkcja monotoniczna $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Załóżmy, że f jest funkcją niemalejącą i nie stałą. Wtedy $f(b) - f(a) > 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem o średnicy mniejszej niż $\varepsilon/(f(b) - f(a))$. Wówczas

$$M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem

$$\begin{aligned} S(f,\kappa) - s(f,\kappa) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \\ &< \varepsilon/(f(b)-f(a)) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ &= \frac{\varepsilon}{(f(b)-f(a))} (f(b)-f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem ponownie na podstawie poprzedniego lematu 9.2 f jest całkowalna w sensie Riemanna. □

Definicja. Mówimy, że podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *miary zero*, gdy dla dowolnego ε istnieje przeliczalna rodzina przedziałów $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka, że

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ oraz } \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 9.5. *Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest miary zero.*

Twierdzenie 9.6. *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. Wówczas*

1. *dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja αf jest całkowalna oraz*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx;$$

2. *funkcja $f + g$ jest całkowalna oraz*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

3. *funkcja $f \cdot g$ jest całkowalna;*

4. *jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

5. *funkcja $|f|$ jest całkowalna oraz*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dowód. 1. Załóżmy, że $\alpha > 0$. Dla dowolnego podziału $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mamy

$$S(\alpha f, \kappa) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = \alpha S(f, \kappa).$$

Podobnie $s(\alpha f, \kappa) = \alpha s(f, \kappa)$. Zatem

$$I^*(\alpha f) = \inf_{\kappa\in\Pi} S(\alpha f, \kappa) = \alpha \inf_{\kappa\in\Pi} S(f, \kappa) = \alpha I^*(f),$$

oraz podobnie $I_*(\alpha f) = \alpha I_*(f)$. Zatem

$$I_*(\alpha f) = \alpha I_*(f) = \alpha I^*(f) = I^*(\alpha f).$$

Stąd αf jest funkcją całkowalną oraz jej całka wynosi $\alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

Załóżmy, że $\alpha < 0$. Wtedy dla dowolnego podziału $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mamy

$$S(\alpha f, \kappa) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = \alpha s(f, \kappa).$$

Podobnie $s(\alpha f, \kappa) = \alpha S(f, \kappa)$. Zatem

$$I^*(\alpha f) = \inf_{\kappa\in\Pi} S(\alpha f, \kappa) = \inf_{\kappa\in\Pi} \alpha s(f, \kappa) = \alpha \sup_{\kappa\in\Pi} s(f, \kappa) = \alpha I_*(f),$$

oraz podobnie $I_*(\alpha f) = \alpha I^*(f)$. Zatem

$$I_*(\alpha f) = \alpha I^*(f) = \alpha I_*(f) = I^*(\alpha f).$$

Stąd αf jest funkcją całkowalną oraz jej całka wynosi $\alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

2. Dla dowolnego podziału $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mamy

$$\begin{aligned} S(f+g, \kappa) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x)+g(x))\Delta x_i \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)\Big)\Delta x_i = S(f, \kappa) + S(g, \kappa). \end{aligned}$$

Podobnie $s(f+g, \kappa) \geqslant s(f, \kappa) + s(g, \kappa)$. Ponieważ f i g są całkowalne, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział κ taki, że

$$I_f - \varepsilon/2 < s(f, \kappa) \leqslant S(f, \kappa) < I_f + \varepsilon/2,$$

$$I_g - \varepsilon/2 < s(g, \kappa) \leqslant S(g, \kappa) < I_g + \varepsilon/2,$$

gdzie

$$I_f = \int_a^b f(x)\,dx \text{ oraz } I_g = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zatem

$$I_f + I_g - \varepsilon \leqslant s(f, \kappa) + s(g, \kappa) \leqslant s(f+g, \kappa) \leqslant I_*(f+g),$$

$$I^*(f+g) \leqslant S(f+g, \kappa) \leqslant S(f, \kappa) + S(g, \kappa) \leqslant I_f + I_g + \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy

$$I_f + I_g \leqslant I_*(f+g) \leqslant I^*(f+g) \leqslant I_f + I_g,$$

a stad

$$I_*(f+g) = I_f + I_g = I^*(f+g).$$

Stąd $f+g$ jest funkcją całkowalną oraz jej całka wynosi $I_f + I_g$.

3. Zostawiamy jako ćwiczenie.

4. Jeśli $f \leqslant g$, to łatwo sprawdzić, że $I^*(f) \leqslant S(f,\kappa) \leqslant S(g,\kappa)$ dla dowolnego podziału κ. Zatem $I^*(f) \leqslant I^*(g)$ i dalej wykorzystujemy całkowalność f i g.

5. Dla dowolnego podziału $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mamy

$$\begin{aligned} S(|f|,\kappa) - s(|f|,\kappa) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} (|f(x)| - |f(y)|) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} (|f(x) - f(y)|) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) - f(y)) = S(f,\kappa) - s(f,\kappa). \end{aligned}$$

Korzystając z lematu 9.2 całkowalność f implikuje całkowalność $|f|$. Ponadto wiemy, że $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Zatem z punktów 1 oraz 4 mamy

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b -|f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

a więc

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Niech $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem $[a,b]$. Załóżmy, że $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy sumę

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

nazywamy *sumą pośrednią*. Wówczas

$$s(f,\kappa) \leqslant \sigma \leqslant S(f,\kappa).$$

Twierdzenie 9.7. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna, to dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{\kappa_n\}$ dowolny ciąg sum pośrednich zbiega do $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Na odwrót, jeśli dla pewnego normalnego ciągu podziałów $\{\kappa_n\}$ wszystkie ciągi sum pśrednich są zbieżne do tej samej granicy I, to f jest całkowalna w sensie Riemanna oraz jej całka jest równa I.

Dowód. Załóżmy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Niech $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów oraz niech $\{\sigma_n\}$ będzie odpowiadającym ciągiem sum pośrednich. Wówczas

$$s(f,\kappa_n) \leqslant \sigma_n \leqslant S(f,\kappa_n).$$

Z lematu 9.1 mamy $s(f,\kappa_n)\to I_*(f)$ oraz $S(f,\kappa_n)\to I^*(f)$, ponadto z całkowalności f mamy $I_*(f)=I^*(f)=\int_a^b f(x)\,dx$. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\sigma_n\to\int_a^b f(x)\,dx$.

Załóżmy, że dla pewnego normalnego ciągu podziałów $\{\kappa_n\}$ wszystkie ciągi sum pośrednich są zbieżne do tej samej granicy I. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\kappa_n)=\lim_{n\to\infty} S(f,\kappa_n)=I,$$

co na podstawie lematu 9.1 oznacza, że $I_*(f)=I^*(f)=I$.

Niech $\varepsilon>0$. Niech $\kappa_n=\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$. Wówczas istnieją $\xi_i,\xi_i'\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,k$ takie, że

$$f(\xi_i)<m_i+\frac{\varepsilon}{b-a}\ \text{oraz}\ f(\xi_i')>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Wówczas

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^k(m_i+\frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_i=s(f,\kappa_n)+\varepsilon,$$

$$\sigma_n'=\sum_{i=1}^k f(\xi_i')\Delta x_i>\sum_{i=1}^k(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_i=S(f,\kappa_n)-\varepsilon.$$

Z założenia oraz z lematu 9.1 mamy przechodząc z n do nieskończoności otrzymamy

$$I\leqslant I_*(f)+\varepsilon\ \text{oraz}\ I\geqslant I^*(f)-\varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon>0$ mamy

$$I\leqslant I_*(f)\leqslant I^*(f)\leqslant I,\ \text{ a więc } I_*(f)=I^*(f)=I.$$

□

Lemat 9.8. *Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funckcją całkowalną w sensie Riemanna oraz niech $a\leqslant c<d\leqslant b$. Wówczas $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon>0$. Wówczas znajdziemy $\kappa\in\Pi_{[a,b]}$ taki, że $S(f,\kappa)-s(f,\kappa)<\varepsilon$. Dokładając ewentualnie do tego podziału punkty c i d możemy założyć $c,d\in\kappa$. Niech $\kappa'\in\Pi_{[c,d]}$ będzie podziałem $\kappa'=\kappa\cap[c,d]$ oraz $\kappa''=\kappa\cup\{c,d\}$ będzie podziałem $[a,b]$. Łatwo sprawdzić, że

$$S(f|_{[c,d]},\kappa')-s(f|_{[c,d]},\kappa')\leqslant S(f,\kappa'')-s(f,\kappa'')\leqslant S(f,\kappa)-s(f,\kappa)<\varepsilon.$$

Zatem na podstawie lematu 9.2 funkcja $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna. □

Twierdzenie 9.9. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz niech $a < c < b$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Niech $\{\kappa_n'\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów dla $[a, c]$ oraz $\{\kappa_n''\}$ niech będzie normalnym ciągiem podziałów dla $[c, b]$. Niech $\kappa_n = \kappa_n' \cup \kappa_n''$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów dla $[a, b]$. Niech σ_n' będzie dowolną sumą pośrednią dla κ_n' oraz σ_n'' będzie dowolną sumą pośrednią dla κ_n''. Wtedy $\sigma_n' + \sigma_n''$ jest sumą pośrednią dla κ_n. Z poprzedniego twierdzenia

$$\sigma_n' \to \int_a^c f(x)\,dx, \quad \sigma_n'' \to \int_c^b f(x)\,dx, \quad \sigma_n' + \sigma_n'' \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Stąd

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Oznaczenia. Jeśli $a < b$, to

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Wniosek 9.10. *Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ jeśli f jest całkowalna na odcinku* $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$, *to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 9.11. *(o wartości średniej) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieje $\xi \in [a, b]$ taki, że*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Ponieważ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc osiąga swój kres górny M oraz kres dolny m. Zatem istnieją $x_1, x_2 \in [a, b]$ takie, że $f(x_1) = m$ oraz $f(x_2) = M$. Ponieważ $m \leqslant f \leqslant M$, więc

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M.$$

Z własności Darboux pomiędzy x_1 i x_2 istnieje ξ taki, że

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Twierdzenie 9.12. *(zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Niech $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Wtedy F jest funkcją różniczkowalną oraz $F'(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$.*

Dowód. Niech $x_0 \in [a, b]$, $h \neq 0$ oraz $x_0 + h \in [a, b]$. Z wniosku 9.10 mamy

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt.$$

Ponadto z twierdzenia o wartości średniej istnieje $0 \leqslant \theta_h \leqslant 1$ taka, że

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = f(x_0 + \theta_h h).$$

Z ciągłości funkcji f dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Załóżmy, że $0 < |h| < \delta$. Wówczas $|(x_0 + \theta_h h) - x_0| = \theta_h |h| < \delta$, a zatem

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = |f(x_0 + \theta_h h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Stąd

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0), \text{ a więc } F'(x_0) = f(x_0).$$

□

Wniosek 9.13. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to posiada funkcję pierwotną. Jeśli G jest pierwotną f, to*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Dowód. Z zasadniczego twierdzenia rachunku całkowego $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ jest pierwotną f. Ponadto $F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$ oraz $F(b) = \int_a^b f(t)\, dt$ Jeśli G jest inną pierwotną f, to $G(x) = F(x) + c$. Zatem

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt - 0.$$

□

9.1 Zastosowania geometryczne całki Riemanna

Zdefiniujemy pole ograniczonego zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$. Niech Q będzie kwadratem takim, że $D \subset Q$. Podzielmy Q na skończoną liczbę prostokątów domkniętych. Wówczas przez S oznaczmy sumę pól tych prostokątów (pole prostokąta to iloczyn długości podstawy i wysokości), które mają niepustą część wspólną ze zbiorem D oraz przez s oznaczmy sumę pól tych prostokątów, które zawierają się w D. Niech S^* będzie kresem dolnym zbioru sum S odpowiadających wszystkim możliwym podziałom Q na skończoną liczbę prostokątów, natomiast przez s^* oznaczmy kres górny zbioru sum s. Wtedy $s^* \leqslant S^*$. Jeśli $s^* = S^*$, to zbiór D nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana*, a wartość $|D| = s^* = S^*$ nazywamy *miarą Jordana* zbioru D lub *polem* zbioru D. Można udowodnić, że definicja pola nie zależy od wielkości i położenia kwadratu Q.

Podobnie można zdefiniować *objętość* podzbiorów w $\mathbb{R}^3$, zastępując prostokąty prostopadłościanami.

Stwierdzenie 9.14. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i nieujemną, to $\int_a^b f(x)\,dx$ jest polem obszaru między wykresem funkcji, osią Ox i prostymi $x = a$ oraz $x = b$, tzn. obszaru*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Wniosek 9.15. *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy pole obszaru między wykresami funkcji f i g, osią Ox i prostymi $x = a$ oraz $x = b$, tzn. obszaru*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

wynosi

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Przykład. Wyznaczmy pole powierzchni elipsy danej wzorem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Powierzchnia elipsy D jest ograniczona z góry wykresem funkcji

$$[-a, a] \ni x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

a z dołu wykresem

$$[-a, a] \ni x \mapsto -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
|D| &= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right| = \\
&= 2b\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \\
&= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \left[ab\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = [abt]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab.
\end{aligned}$$

Stwierdzenie 9.16. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i nieujemną. Objętość bryły obrotowej V powstałej w wyniku obrotu obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i prostymi Ox, $x = a$ oraz $x = b$ dookoła osi Ox, tzn.*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b, \sqrt{y^2+z^2} \leqslant f(x)\},$$

dana jest wzorem

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Dowód. Niech $\kappa = \{x_0, \ldots, x_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Niech $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ dla $i = 1, \ldots, k$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i \leqslant |V| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i,$$

a więc

$$s(\pi f^2, \kappa) \leqslant |V| \leqslant S(\pi f^2, \kappa).$$

Niech $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$. Wówczas

$$s(\pi f^2, \kappa_n) \leqslant |V| \leqslant S(\pi f^2, \kappa_n)$$

oraz z ciągłości f mamy

$$\lim_{n\to\infty} s(\pi f^2, \kappa_n) = \lim_{n\to\infty} S(\pi f^2, \kappa_n) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Stąd

$$|V| = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

□

Przykład. Obliczmy objętość wnętrza elipsoidy V powstałej z obrotu z obrotu elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wokół osi Ox. Wtedy

$$|V| = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Definicja. Krzywą klasy C^1 będziemy nazywać dowolne odwzorowanie

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

takie, że x, y są funkcjami klasy C^1 oraz $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$ dla $t \in [a,b]$. Krzywą będziemy również nazywać zbiór $\gamma([a,b])$. Wtedy odwzorowanie γ nazywamy parametryzacją krzywej.

Przykład. 1. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Wówczas wykres funkcji f, tzn.

$$\{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$$

jest krzywą klasy C^1, a jej parametryzacja, to $\gamma(t) = (t, f(t))$. Istotnie, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1 + (f'(t))^2 \geqslant 1 > 0$.

2. Dowolny okrąg o środku w (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$ jest krzywą o prarmetryzacji

$$\gamma(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Wówczas $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2 > 0$.

Niech $\kappa = \{t_0, \ldots, t_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Wówczas punkty $A_i = (x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, \ldots, k$ leżą na krzywej γ oraz długość łamanej łączącej kolejno punkty $A_0, A_1, \ldots, A_k$ wynosi

$$d(\kappa) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Jeśli istnieje liczba d taka, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{\kappa_n\}$ mamy $\lim_{n\to\infty} d(\kappa_n) = d$, to mówimy, że krzywa γ jest *prostowalna*, a liczbę $d(\gamma) = d$ nazywamy *długością* tej krzywej.

Lemat 9.17. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c mamy*

$$|\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2}| \leqslant |c - b|.$$

Dowód. Jeśli $a = 0$, to nierówność jest oczywista, ponieważ jest postaci $||c| - |b|| \leqslant |c - b|$. Jeśli $a \neq 0$, to funkcja $x \mapsto \sqrt{a^2 + x^2}$ jest różniczkowalna oraz

$$(\sqrt{a^2 + x^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje liczba rzeczywista d pomiędzy b i c taka, że

$$\left|\frac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b}\right| = \left|\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}\right| < 1.$$

□

Twierdzenie 9.18. *Dowolna krzywa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ klasy C^1 jest prostowalna oraz*

$$d(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka, że $|t - s| < \delta$ implikuje $|y'(t) - y'(s)| < \varepsilon/(b - a)$. Niech $\kappa = \{t_0, \ldots, t_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$, którego średnica jest mniejsza niż δ. Z twierdzenia Lagrange'a dla każdego $i = 1, \ldots, k$ istnieją $\theta_i, \theta_i' \in [t_{i-1}, t_i]$ takie, że

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\theta_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\theta_i')\Delta t_i.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
d(\kappa) &= \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x'(\theta_i))^2 + (y'(\theta_i'))^2}\Delta t_i \leqslant \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x'(\theta_i))^2 + (y'(\theta_i))^2}\Delta t_i + \sum_{i=1}^{k} |y'(\theta_i) - y'(\theta_i')|\Delta t_i \leqslant \\
&\leqslant \sigma(f, \kappa) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

gdzie $f(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Podobnie

$$\sigma(f, \kappa) - \varepsilon \leqslant d(\kappa) \leqslant \sigma(f, \kappa) + \varepsilon.$$

Niech $\{\kappa_n\}$ będzie normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$. Wówczas

$$\sigma(f, \kappa_n) - \varepsilon \leqslant d(\kappa_n) \leqslant \sigma(f, \kappa_n) + \varepsilon$$

dla odpowiednio dużych n. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \kappa_n) - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} d(\kappa_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} d(\kappa_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \kappa_n) + \varepsilon.$$

Przechodząc z ε do zera otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \kappa_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} d(\kappa_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} d(\kappa_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \kappa_n),$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} d(\kappa_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,\kappa_n) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

□

Wniosek 9.19. *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to długości jej wykresu wynosi*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Przykład. Obliczmy obwód koła o środku w (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$. Wówczas $x(t) = x_0 + r\cos t$, $y(t) = y_0 + r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Zatem długość okręgu wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Uwaga 22. Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją dodatnią klasy C^1, to pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu wykresu f dookoła osi Ox wynosi

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

9.2 Całki niewłaściwe

Załóżmy, że funkcja f jest określona na przedziale $[a,b)$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ lub $b = +\infty$, a funkcja f może być nieograniczona. Załóżmy dodatkowo, że dla dowolnego $a < c < b$ funkcja $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\,dx,$$

nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a,b)$ i oznaczamy ją przez

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą dla przedziałów postaci $(a,b]$. Jeśli f jest określona na przedziale otwartym (a,b) oraz dla dowolnych $a < c < d < b$ funkcja $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna, to również możemy zdefiniować całkę niewłaściwą f na (a,b). Załóżmy, że dla pewnego $c \in (a,b)$ istnieją całki niewłaściwe f na przedziałach $(a,c]$ oraz $[c,b)$. Wówczas przyjmujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

o ile działanie dodawania po prawej stronie jest wykonalne, tzn. nie jest to wyrażenie typu $\infty - \infty$. Zauważmy, że powyższa definicja nie zależy od wyboru punktu c. Istotnie, niech c' będzie innym punktem przedziału (a, b). Dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że $c' < c$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\,dx &= \lim_{d\to a}\int_d^c f(x)\,dx = \lim_{d\to a}\int_d^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^c f(x)\,dx \\
&= \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^c f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_c^b f(x)\,dx &= \lim_{d\to b}\int_c^d f(x)\,dx = \lim_{d\to a}\int_{c'}^d f(x)\,dx - \int_{c'}^c f(x)\,dx \\
&= \int_{c'}^b f(x)\,dx - \int_{c'}^c f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Dodając obie równości stronami otrzymamy

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\,dx.$$

Przykład. 1. Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ ma całkę niewłaściwą na $(-\infty, +\infty)$. Ponieważ funkcja ta jest ciągła więc na każdym przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna. Jako punkt pośredni wybieramy 0. Wtedy

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to-\infty} - \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2},$$

a stąd

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

2. Niech $\alpha > 0$ i rozważmy funkcję $\frac{1}{x^\alpha}$ na przedziale $(0, 1]$. Gdy $\alpha \neq 1$, to

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0} \frac{1 - c^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Zatem gdy $\alpha < 1$, to

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

oraz gdy $\alpha > 1$, to

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$$

Jeśli $\alpha = 1$, to

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0} - \ln c = +\infty.$$

3. Dla $\alpha > 0$ rozważmy funkcję $\frac{1}{x^\alpha}$ na przedziale $[1, +\infty)$. Wówczas łatwo można pokazać, że
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{dla} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{dla} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

4.
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c e^{-x} dx = \lim_{c\to+\infty} (1 - e^{-c}) = 1.$$

Uwaga 23. Jeśli $f : [a, b) \to [0, +\infty)$ jest ciągła to f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $[a, b) \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ jest ograniczona. W przeciwnym przypadku $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$. Dlatego dla funkcji przyjmujących wartości nieujemne całkowalność oznaczmy przez $\int_a^b f(t)\,dt < +\infty$, zaś brak całkowalności przez $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$.

Twierdzenie 9.20. *(Kryterium całkowe zbieżności szeregów) Niech k będzie liczbą naturalną oraz niech $f : [k, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie nierosnącą, nieujemną funkcją ciągłą. Szereg $\sum_{n=k}^\infty f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_k^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.*

Dowód. Dla dowolnego $n \geqslant k$ mamy
$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n).$$

Zatem
$$\int_k^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=k}^n f(j) \leqslant f(k) + \int_k^n f(x)\,dx.$$

Jeśli $\int_k^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, to
$$\sum_{j=k}^n f(j) \leqslant f(k) + \int_k^n f(x)\,dx \leqslant f(k) + \int_k^{+\infty} f(x)\,dx,$$

a stąd ciąg sum częściowych jest ograniczony. Ponieważ wyrazy szeregu są nieujemne, więc szereg jest zbieżny.

Jeśli $\int_k^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, to
$$\lim_{c\to+\infty} \int_k^c f(x)dx = +\infty,$$

a więc $\int_k^n f(x)\,dx \to +\infty$. Ponadto
$$\int_k^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=k}^n f(j),$$

więc ciąg sum częściowy jest również rozbieżny do nieskończoności. □

Stwierdzenie 9.21. *Niech* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *będą nieujemnymi funkcjami ciągłymi takimi, że* $f(x) \leqslant g(x)$ *dla* $x \in [a, b)$*. Jeśli* $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$*, to* $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$*.*

Dowód. Rozważmy odwzorowanie

$$[a, b) \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

Funkcja ta jest niemalejąca oraz ograniczona ponieważ

$$\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

Ponieważ jest monotoniczna, więc posiada granicę lewostronną w b, a ponieważ jest ograniczona ta granica jest skończona. □

Obecnie, za pomocą całek niewłaściwych, zdefiniujemy funkcję gamma Eulera.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Stwierdzenie 9.22. *Funkcja* Γ *jest określona dla wszystkich* $x > 0$*.*

Dowód.
$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Dla $t \in (0, 1]$ mamy $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1}$. Ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha < 1$ funkcja $t \mapsto t^{-\alpha}$ ma skończoną całkę na $(0, 1]$. Stąd wynika, że pierwsza całka jest skończona.

Aby wykazać zbieżność drugiej całki, wykorzystamy kryterium całkowe zbieżności szeregów. Rozważmy funkcję $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ dla $t \geqslant 1$. Wówczas

$$f'(t) = (x-1)t^{x-2}e^{-t} - t^{x-1}e^{-t} = ((x-1) - t)t^{x-2}e^{-t} < 0 \text{ dla } t > x - 1.$$

Zatem f jest malejąca na $[x - 1, +\infty)$. Zatem z kryterium całkowe zbieżności szeregów

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{x-1}e^{-n} < +\infty.$$

Natomiast ostatni szereg jest zbieżny, co można pokazać korzystając z kryterium d'Alamberta. Istotnie

$$\frac{(n+1)^{x-1}e^{-n-1}}{n^{x-1}e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{x-1} e^{-1} \to \frac{1}{e} < 1.$$

□

Twierdzenie 9.23. *Funkcja Γ posiada następujące własności:*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *dla* $x > 0$,
2. $\Gamma(n+1) = n!$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. 1. Bedziemy całkować przez części biorąc funkcje $u(t) = e^{-t}$, $v(t) = t^x/x$, wtedy $u'(t) = -e^{-t}$ oraz $v'(t) = t^{x-1}$. Zatem

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \frac{t^x}{x}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.\end{aligned}$$

2. udowodnimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ mamy

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!.$$

Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(n+1) = n!$. Wówczas

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

□

10 Ciągi i szeregi funkcyjne

Niech $D \subset \mathbb{R}$ oraz załóżmy, że dla każdej liczby naturalnej n mamy zdefiniowaną funkcję $f_n : D \to \mathbb{R}$. Mówimy wówczas, że został określony *ciąg funkcyjny* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny punktowo* do funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego $x \in D$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

lub równoważnie

$$\forall_{x\in D}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, co będziemy oznaczać przez $f_n \rightrightarrows f$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

lub równoważnie

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in D}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Uwaga 24. Zbieżność jednostajna implikuje zbieżność punktową ale nie odwrotnie.

Przykład. Rozważmy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ na $[0,1]$ dany następująco $f_n(x) = x^n$. Jeśli $x < 1$, to $x^n \to 0$, a jeśli $x = 1$, to $x^n = 1$. Zatem ciąg $\{f_n\}$ jest punktowo zbieżny do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{gdy} \quad x = 1. \end{cases}$$

Natomiast $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny do f, ponieważ dla dowolnego $a \in (0,1)$ mamy

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(\sqrt[n]{a}) - f(\sqrt[n]{a})| = a > 0.$$

Definicja. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia *jednostajny warunek Cauchy'ego*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in D}\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 10.1. *Ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Załóżmy, że $f_n \rightrightarrows f$. Wówczas dla dowolnego $vep > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $x \in D$ oraz $n \geqslant n_0$. Wtedy dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ oraz $x \in D$ mamy

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Na odwrót, załóżmy, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Zatem dla dowolnego $x \in D$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in D$. W ten sposób otrzymaliśmy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ taką, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest punktowo zbieżny do f. Pokażemy, że również $f_n \rightrightarrows f$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ oraz $x \in D$ mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2.$$

Ustalmy $x \in D$ oraz $n \geqslant n_0$. Przechodząc z m do nieskończoności otrzymujemy, że

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

a więc $f_n \rightrightarrows f$. □

Twierdzenie 10.2. *Jeśli $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcyjnym funkcji ciągłych zbieżnym jednostajnie do $f : D \to \mathbb{R}$, to f jest również funkcją ciągłą.*

Dowód. Ustalmy $x_0 \in D$. Pokażemy, że f jest ciągła w x_0. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $x \in D$ mamy

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Z ciągłości funkcji f_{n_0} istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Wtedy jeśli $x \in D$ spełnia $|x - x_0| < \delta$, to

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

a stąd f jest ciągła w x_0. □

Definicja. Jeśli $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest *niemal jednostajnie zbieżny* do $f : D \to \mathbb{R}$, gdy jest on jednostajnie zbieżny do f na dowolnym domkniętym podprzedziale zawartym w D.

Przykład. Rozważmy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ na $[0, 1)$ dany następująco $f_n(x) = x^n$. Jest on niemal jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej. Istotnie, jeśli $[a, b] \subset [0, 1)$, to dla $x \in [a, b]$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leqslant a^n, \text{ zatem } \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a^n \to 0,$$

ponieważ $0 \leqslant a < 1$.

Wniosek 10.3. *Jeśli $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcyjnym funkcji ciągłych zbieżnym niemal jednostajnie do $f : D \to \mathbb{R}$, to f jest również funkcją ciągłą.*

10.1 Szeregi funkcyjne

Dla dowolnego ciągu funkcyjnego $\{f_n : D \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ definiujemy szereg funkcyjny jako ciąg sum częściowych $\{S_n : D \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$, tzn.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

i oznaczamy przez $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Definicja. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ jest zbieżny punktowo (jednostajnie), gdy ciąg $\{S_n\}$ jest zbieżny punktowo (jednostajnie). Wówczas granicę tego ciągu oznaczmy przez $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ i nazywamy sumą szeregu funkcyjnego.

Wniosek 10.4. *Suma szeregu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Wniosek 10.5. *Szereg funkcyjny $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant n_0}\ \forall_{k\geqslant 0}\ \forall_{x\in D}\ |f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+k}(x)|<\varepsilon.$$

Twierdzenie 10.6. *(kryterium Weierstrassa) Niech $\{f_n : D\to\mathbb{R}; n\in\mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjny oraz niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny oraz $|f_n(x)|\leqslant a_n$ dla wszystkich $x\in D$ oraz $n\in\mathbb{N}$. Wówczas szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Pokażemy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon>0$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, więc istnieje $n_0\in\mathbb{N}$ taka, że dla $n\geqslant n_0$ oraz $k\geqslant 0$ mamy

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}<\varepsilon.$$

Zatem dla dowolnych $n\geqslant n_0$, $k\geqslant 0$ oraz $x\in D$ mamy

$$\begin{aligned}&|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+k}(x)|\leqslant\\ \leqslant\ &|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\ldots+|f_{n+k}(x)|\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Przykład. Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ jest jednostajnie zbieżny.

Definicja. Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

gdzie $x_0\in\mathbb{R}$ oraz $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, nazywamy *szeregiem potęgowym.*

Oczywiście szereg potęgowy jest zbieżny w $x=x_0$.

Lemat 10.7. *Jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[x_0-r,x_0+r]$, gdzie $r=|x_1-x_0|$.*

Dowód. Z założenia szereg $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ jest zbieżny oraz $|a_n(x-x_0)^n|\leqslant|a_n|r^n$ dla $x\in[x_0-r,x_0+r]$ oraz $n\geqslant 0$. Zatem z kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[x_0-r,x_0+r]$. □

Twierdzenie 10.8. *Niech* $\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. *Wówczas*

1. *jeśli* $\lambda = 0$, *to szereg funkcyjny* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *jest niemal jednostajnie zbieżny na całej prostej;*

2. *jeśli* $\lambda = +\infty$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *jest rozbieżny dla wszystkich* $x \neq x_0$*;*

3. *jeśli* $0 < \lambda < +\infty$, *to szereg funkcyjny* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale* $(x_0 - R, x_0 + R)$, *gdzie* $R = 1/\lambda$ *oraz rozbieżny dla każdego* $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.

Dowód. 1. $\lambda = 0$. Rozważmy dowolny odcinek $[a, b]$ oraz niech $r > 0$ będzie taka, że $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$. Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n((x_0 + r) - x_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r\sqrt[n]{|a_n|} \to 0 < 1,$$

więc możemy skorzystać z kryterium Cauchy'ego. Zatem korzystając z poprzedniego lematu szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny w $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$.

2. $\lambda = +\infty$. Niech $x_1 \neq x_0$ oraz oznaczmy $r = |x_1 - x_0| > 0$. Gdyby szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ był zbieżny, to $a_n(x_1 - x_0)^n \to 0$, a więc $|a_n| r^n \to 0$. Z drugiej strony $\sqrt[n]{|a_n| r^n} = \sqrt[n]{|a_n|} r > 1$ dla nieskończenie wielu n. Zatem $|a_n| r^n > 1$ dla nieskończenie wielu n, co stoi w sprzeczności z $|a_n| r^n \to 0$.

3. $0 < \lambda < +\infty$ oraz $R = 1/\lambda$. Niech $[a, b]$ będzie dowolnym podprzedziałem $(x_0 - R, x_0 + R)$. Następnie niech $0 < r < R$ będzie liczbą taką, że $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$. Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n((x_0 + r) - x_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \to r\lambda = \frac{r}{R} < 1,$$

więc możemy skorzystać z kryterium Cauchy'ego. Zatem korzystając z poprzedniego lematu szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny w $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$.

Niech $x_1 \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$ oraz oznaczmy $r = |x_1 - x_0| > 0$. Wówczas $r > R$. Gdyby szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ był zbieżny, to $a_n(x_1 - x_0)^n \to 0$, a więc $|a_n| r^n \to 0$. Z drugiej strony ponieważ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda = 1/R > 1/r$, więc $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/r$ dla nieskończenie wielu n. Zatem $|a_n| r^n > 1$ dla nieskończenie wielu n, co stoi w sprzeczności z $|a_n| r^n \to 0$. $\square$

Definicja. Liczbę $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, natomiast przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$ *przedziałem zbieżności* szeregu.

Wniosek 10.9. *Szereg potęgowy jest niemal jednostajnie zbieżny w swoim przedziale zbieżności oraz jest w nim funkcją ciągłą.*

Stwierdzenie 10.10. *Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Jeśli $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$, to $R = 1/\lambda$.*

Dowód. Załóżmy, że $|x-x_0| < 1/\lambda$. Pokażemy, że wówczas w punkcie x szereg jest bezwzględnie zbieżny korzystając z kryterium d'Alamberta. Otóż,

$$\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| \to \lambda|x-x_0| < 1.$$

Jeśli natomiast $|x-x_0| > 1/\lambda$, to

$$\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| \to \lambda|x-x_0| > 1,$$

i z dowodu kryterium d'Alamberta $|a_n(x-x_0)^n| \nrightarrow 0$, a więc $a_n(x-x_0)^n \nrightarrow 0$, a zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nie jest zbieżny. Stąd wynika, że przedział $(x_0-1/\lambda, x_0+\lambda)$ jest przedziałem zbieżności szeregu, a zatem $R = 1/\lambda$. □

Uwaga 25. Poprzednie twierdzenia nie rozstrzygają zbieżności szeregu potęgowego w krańcach przedziału zbieżności, tzn. w punktach $x_0 - R$ oraz $x_0 + R$.

Przykład.

1. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Wówczas
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1,$$
więc $R = 1$. Dla $x = 1$ szereg jest zbieżny, zaś dla $x = -1$ jest rozbieżny.

2. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Wówczas
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1,$$
więc $R = 1$. Dla $x = \pm 1$ szereg jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego.

3. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Wówczas
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1,$$
więc $R = 1$. Dla $x = \pm 1$ szereg jest nawet bezwzględnie zbieżny.

4. Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wówczas
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0,$$
więc $R = +\infty$ i szereg potęgowy jest niemal jednostajnie zbieżny na całej prostej.

10.2 Różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

Twierdzenie 10.11. *Niech $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym punktowo do funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$ są klasy C^1 oraz ciąg $\{f_n'\}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wówczas funkcja f jest klasy C^1 oraz $f'(x) = g(x)$, czyli*

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Dowód. Ustalmy $x_0 \in [a,b]$ oraz $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n' \rightrightarrows g$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon/2 \text{ dla wszystkich } x \in [a,b].$$

Funkcja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jako granica jednostajna funkcji ciągłych jest również ciągła, a zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$.

Załóżmy teraz, że $n \geqslant n_0$ oraz $0 < |h| < \delta$. Wówczas z twierdzenia Lagrange'a istnieje $0 < \theta_n < 1$ taka, że

$$\frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} = f_n'(x_0 + \theta_n h).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - g(x_0) \right| &= |f_n'(x_0+\theta_n h) - g(x_0)| \leqslant \\ \leqslant\ & |f_n'(x_0+\theta_n h) - g(x_0+\theta_n h)| + |g(x_0+\theta_n h) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ponieważ $f_n(x_0) \to f(x_0)$ oraz $f_n(x_0+h) \to f(x_0+h)$, gdy $n \to \infty$, więc przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy, że

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - g(x_0) \right| \leqslant \varepsilon, \text{ gdy } |h| < \delta.$$

Stąd

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g(x_0)$$

dla dowolnego $x_0 \in [a,b]$, a zatem $f' = g$. □

Wniosek 10.12. *Niech $\{f_n : (a,b) \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym punktowo do funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$ są klasy C^1 oraz ciąg $\{f_n'\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Wówczas funkcja f jest klasy C^1 oraz $f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a,b)$.*

Uwaga 26. Założenie, że ciąg pochodnych jest jednostajnie zbieżny w twierdzeniu 10.11 jest istotne, co ilustruje poniższy przekład.

Przykład. Rozważmy ciąg funkcyjny $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$. Ten ciąg jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x) = |x|$. Wynika to z faktu, że

$$\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| \leqslant \frac{1}{n},$$

(wystarczy zastosować nierówność $|\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2}| \leqslant |c - b|$ dla $a = x$, $b = 0$ oraz $c = 1/n$). Ponadto, $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1/n^2}}$, więc $f_n' \to g$ punktowo, gdzie $g = \operatorname{sgn}$. Pomimo wszystko funkcja graniczna f nie jest różniczkowalna w 0.

Wniosek 10.13. *Niech $\{f_n : (a, b) \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjnym klasy C^1 takim, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżnym punktowo oraz $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ jest niemal jednostajnie zbieżny. Wówczas funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest klasy C^1 oraz $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ dla $x \in (a, b)$.*

Twierdzenie 10.14. *Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ oraz niech $S : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ sumą tego szeregu. Wówczas S jest funkcją klasy C^1 oraz*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Dowód. Rozważmy szereg potęgowy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Ponieważ

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_{n-1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

więc promień zbieżności tego szeregu wynosi również R. Niech

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Wówczas S_n zbiega niemal jednostajnie do S na $(x_0 - R, x_0 + R)$. Ponadto

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1},$$

a więc $\{S'_n\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $(x_0 - R, x_0 + R)$. Z poprzedniego wniosku otrzymujemy, że S jest funkcją klasy C^1 oraz

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

□

Wniosek 10.15. *Szereg potęgowy jest na przedziale zbieżności funkcją klasy C^∞ oraz jeśli $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, to*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Wniosek 10.16. *Załóżmy, że szeregi potęgowe $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ mają dodatnie promienie zbieżności oraz $A(x) = B(x)$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$. Wówczas $a_n = b_n$ dla $n \geqslant 0$.*

Dowód. Z poprzedniego wniosku wiemy, że

$$A^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

oraz

$$B^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)b_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Zatem

$$k!a_k = A^{(k)}(x_0) = B^{(k)}(x_0) = k!b_k$$

dla dowolnego $k \geqslant 0$. □

Przykład. Przedziałem zbieżności szeregu

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

jest $(-1, 1)$. Różniczkując ten szereg otrzymamy, że

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

dla $x \in (-1, 1)$.

10.3 Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

Lemat 10.17. *Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami ograniczonymi takimi, że $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Wówczas dla dowolnego podziału $\kappa \in \Pi_{[a,b]}$ mamy*

$$|S(f,\kappa) - S(g,\kappa)| \leqslant \varepsilon(b-a) \text{ oraz } |s(f,\kappa) - s(g,\kappa)| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Dowód. Niech $\kappa = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$. Ponieważ $f(x) \leqslant g(x) + \varepsilon$ dla $x \in [a,b]$, więc

$$S(f,\kappa) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in[x_{i-1}x_i]} f(x)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in[x_{i-1}x_i]} (g(x)+\varepsilon)\Delta x_i = S(g,\kappa) + \varepsilon(b-a).$$

Ponadto, $g(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$ dla $x \in [a,b]$, więc zamieniając rolami f i g otrzymujemy

$$S(g,\kappa) \leqslant S(f,\kappa) + \varepsilon(b-a).$$

Stąd

$$-\varepsilon(b-a) \leqslant S(f,\kappa) - S(g,\kappa) \leqslant \varepsilon(b-a) \iff |S(f,\kappa) - S(g,\kappa)| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Nierówność dla sum dolnych dowodzi się analogicznie. □

Twierdzenie 10.18. *Niech $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjnym funkcji ograniczonych i całkowalnych w sensie Riemanna. Jeśli $\{f_n\}$ zbiega jednostajnie do $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, to f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy, że f jest ograniczona. Z jednostajnej zbieżności istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $|f_{n_0}(x) - f(x)| < 1$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Ponieważ f_{n_0} jest ograniczona, więc istnieje $M \geqslant 0$ taka, że $|f_{n_0}(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Zatem dla wszystkich $x \in [a,b]$ mamy

$$|f(x)| \leqslant |f_{n_0}(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| < M + 1,$$

a więc f jest ograniczona.

Teraz udowodnimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Musimy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\kappa \in \Pi_{[a,b]}$ taki, że $|S(f,\kappa) - s(f,\kappa)| < \varepsilon$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Ponieważ f_{n_0} jest całkowalna w sensie Riemanna, więc istnieje $\kappa \in \Pi_{[a,b]}$ taki, że $|S(f_{n_0},\kappa) - s(f_{n_0},\kappa)| < \varepsilon/2$. Z poprzedniego lematu wiemy, że

$$|S(f,\kappa) - S(f_{n_0},\kappa)| \leqslant \varepsilon/4 \text{ oraz } |s(f,\kappa) - s(f_{n_0},\kappa)| \leqslant \varepsilon/4.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&|S(f_{n_0},\kappa) - s(f_{n_0},\kappa)| \leqslant \\
&\leqslant \ |S(f,\kappa) - S(f_{n_0},\kappa)| + |S(f_{n_0},\kappa) - s(f_{n_0},\kappa)| + |s(f_{n_0},\kappa) - s(f,\kappa)| < \\
&< \ \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

a więc f jest całkowalna w sensie Riemanna.

Na zakończenie pokażemy, że $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Wtedy dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leqslant \\
&\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Uwaga 27. Jeśli $\{f_n\}$ zbiega tylko punktowo do f, to zbieżność w poprzednim twierdzeniu na ogół nie zachodzi.

Przykład. Niech $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{gdy} \quad x \in [0, 1/(2n)] \\ n - n^2 x & \text{gdy} \quad x \in [1/(2n), 1/n] \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Ciąg $\{f_n\}$ zbiega punktowo do $f = 0$. Istotnie, jeśli $x = 0$, to $f_n(x) = 0 \to 0$. Jeśli $0 < x \leqslant 1$, to znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $1/n_0 \leqslant x$. Wtedy $x \in [1/n, 1]$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$, a więc $f_n(x) = 0$ dla $n \geqslant n_0$, stąd $f_n(x) \to 0$. Ponadto, łatwo sprawdzić, że $\in_0^1 f_n(x)\,dx = 1/2$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1/2 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Wniosek 10.19. *Niech $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem funkcyjnym funkcji ograniczonych i całkowalnych w sensie Riemanna. Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny, jego suma jest funkcją ograniczoną i całkowalną w sensie Riemanna oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

Przykład. 1. Wiemy już, że przedziałem zbieżności szeregu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

jest $(-1, 1)$. Zatem na tym przedziale szereg jest niemal jednostajnie zbieżny. Weźmy $x \in (-1, 1)$, korzystając z poprzedniego wniosku dla przedziału $[0, x]$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+x) - \ln 1 = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

2. Korzystając z niemal jednostajnej zbieżności szeregu

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

na odcinku $(-1, 1)$ postępując podobnie otrzymamy

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

11 Przybliżone metody całkowania

Mając dane $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na odcinku $[a, b]$, możemy określić wielomian n–tego stopnia $w(x)$, który w tych punktach przyjmuje z góry dane $n+1$ wartości: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tzn.

$$w(x_k) = y_k \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Najpierw dla dowolnego $k = 0, 1, \ldots, n$ określimy wielomian n–tego stopnia $u_k(x)$ taki, że

$$u_k(x_k) = 1 \text{ oraz } u_k(x_j) = 0 \text{ dla } j \neq k.$$

Zauważmy, że wielomian

$$u_k(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

spełnia ten warunek. Następnie określamy tzw. *wielomian interpolacyjny Lagrange'a* o węzłach w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ następująco

$$w(x) = y_0 u_0(x) + y_1 u_1(x) + \ldots + y_n u_n(x).$$

Wielomian tez jest jedynym wielomianem stopnia co najwyżej n, który spełnia warunek (6). Istotnie, jeśli pewien wielomian stopnia co najwyżej n v spełnia (6), to wielomian $w - v$ jest stopnia co najwyżej n oraz $(w - u)(x_k) = 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Zatem jest to wielomian zerowy, a więc $w = v$.

Gdy funkcja wyrażająca zależności między jakimiś wielkościami znana jest nam jedynie empirycznie, mianowicie znana jest skończona ilość wartości (na podstawie pomiaru), to przybliżoną wartość całki tej funkcji liczy się poprzez policzenie interpolacji Lagrange'a oraz następnie obliczenie całki otrzymanego wielomianu.

Szczególnie prosty wzór otrzymujemy, gdy $n = 2$ oraz $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$, $x_2 = b$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)\,dx &= y_0 \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{\frac{(b-a)^2}{2}}\,dx + \\ &\quad + y_1 \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{-\frac{(b-a)^2}{4}}\,dx + y_2 \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{\frac{(b-a)^2}{2}}\,dx.\end{aligned}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned}&\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})(x-b)\,dx \\ &= \left| \begin{array}{c} x = a + (b-a)t \\ dx = (b-a)dt \end{array} \right| = (b-a)^3 \int_0^1 (x - 1/2)(x-1)\,dx = \\ &= (b-a)^3 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{(b-a)^3}{12}.\end{aligned}$$

Obliczając podobnie pozostałe całki otrzymamy

$$\int_a^b w(x)\,dx = \frac{1}{6}(b-a)(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

zwany *wzorem Simpsona.*