

## ZESTAW V

### Rachunek całkowy

**Zadanie 1.** Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lllll} a) \int x^5 dx & b) \int \sqrt[3]{x} dx & c) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} & d) \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx & e) \int 4^x dx \\ f) \int \frac{dx}{3^x} dx & g) \int e^{x+3} dx & h) \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx & i) \int \frac{x^5 - 2x^3 + 4x}{x^2} dx & j) \int (x^2 - 3)\sqrt{x} dx \\ k) \int \frac{x^2 - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}} dx & l) \int \frac{2^x - 5^x}{10^x} dx & m) \int \frac{e^{-2x} - 4}{e^{-x} + 2} dx & n) \int \operatorname{ctg}^2 x dx & o) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \end{array}$$

**Zadanie 2.** Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll} a) \int x e^x dx & b) \int e^x \sin x dx & c) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & d) \int x^2 e^{-x} dx \\ e) \int \frac{\ln x}{x^2} dx & f) \int \ln x dx & g) \int \ln^2 x dx & h) \int x \sin x \cos x dx \end{array}$$

**Zadanie 3.** Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lllll} a) \int (2x - 5)^7 dx & b) \int \cos(3 - 2x) dx & c) \int x\sqrt{x - 3} dx & d) \int x\sqrt{x^2 + 1} dx & e) \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} \\ f) \int \frac{x dx}{(4 + x^2)^5} & g) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & h) \int e^{\sqrt{x}} dx & i) \int \frac{e^{3x}}{1 + e^{6x}} dx & j) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} \\ k) \int \frac{e^{-4x}}{\sqrt{4 + e^{-4x}}} dx & l) \int \operatorname{tg} x dx & m) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx & n) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx & o) \int \sin^5 x \cos^2 x dx \end{array}$$

**Zadanie 4.** Obliczyć całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$a) \int \frac{dx}{x - 4} \quad b) \int \frac{dx}{(x + 2)^3} \quad c) \int \frac{dx}{2x + 3} \quad d) \int \frac{dx}{(3x + 1)^2} \quad e) \int \frac{dx}{5 - 3x}$$

**Zadanie 5.** Obliczyć całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\begin{array}{lllll} a) \int \frac{dx}{x^2 + 4} & b) \int \frac{dx}{2x^2 + 5} & c) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} & d) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} & e) \int \frac{x}{x^2 + 3} dx \\ f) \int \frac{2x}{4x^2 + 5} dx & g) \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 7} dx & h) \int \frac{x + 2}{x^2 + 9} dx & i) \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} dx & j) \int \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx \end{array}$$

**Zadanie 6.** Obliczyć całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

$$a) \int \frac{x + 1}{x(x - 3)} dx \quad b) \int \frac{dx}{x(x + 1)^2} \quad c) \int \frac{x^2 + 2}{x + 2} dx \quad d) \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x + 1}{x^2 + x - 2} dx \quad e) \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + 5x + 6} dx$$

**Zadanie 7.** Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 a) \int \operatorname{arctg} x \, dx & b) \int x \sin x \, dx & c) \int 3^x 5^{2-x} \, dx & d) \int x 2^x \, dx \\
 e) \int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} \, dx & f) \int \frac{dx}{(2x + 11)^4} \, dx & g) \int \frac{x^3 + 5x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 4)(x^2 + 4x + 5)} \, dx & h) \int \frac{5x^3 - 4x^2 - 13x + 4}{x^4 + 10x^2 + 9} \, dx \\
 i) \int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x} & j) \int \frac{\cos x}{\sin^8 x} \, dx & k) \int x^3 \ln^2 x \, dx & l) \int e^{-2x} \sin x \, dx
 \end{array}$$

**Zadanie 8.** Korzystając z twierdzenia o związku między całką oznaczoną a nieoznaczoną obliczyć podane całki oznaczone:

$$a) \int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx \quad b) \int_0^\pi \sin x \, dx \quad c) \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \quad d) \int_1^2 (x^3 - 2x + 5) \, dx$$

**Zadanie 9.** Korzystając z twierdzenia o podstawieniu obliczyć podane całki oznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} & b) \int_1^{\frac{3}{2}} x^2 \sqrt{3 - 2x} \, dx & c) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} & d) \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 e) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx & f) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx & g) \int_1^e \ln x \, dx & h) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}
 \end{array}$$

**Zadanie 10.** Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki oznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_{-1}^0 x e^{-x} \, dx & b) \int_0^{\ln 3} x e^{-x} \, dx & c) \int_0^\pi x \sin x \, dx & d) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx \\
 e) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x \operatorname{arctg} x \, dx & f) \int_0^1 \ln(2-x) \, dx & g) \int_1^2 \ln x \, dx & h) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx
 \end{array}$$

**Zadanie 11.** Obliczyć podane całki oznaczone:

$$a) \int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx \quad b) \int_0^4 \sqrt{x^2 - 2x + 1} \, dx \quad c) \int_0^3 f(x) \, dx, f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ (2 - x)^2 & \text{dla } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

**Zadanie 12.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego

$$a) \text{wykresami funkcji } y = x^2, y = 2x + 3, \quad b) \text{okręgiem } x^2 + y^2 = 1.$$