Zamawianie kształcenia na kierunkach technicznych, matematycznych i przyrodniczych - pilotaż

projekt systemowy Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego

umowa na realizację zadania nr 22/DSW/4.1.2/2008 z dn. 12.12.2008 r.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wydział Matematyki i Informatyki

Krzysztof Frączek

Modele Matematyczne Gospodarki Rynkowej

Wykład dla studentów II roku
kierunku matematyka specjalność zastosowania matematyki

Toruń 2010

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

1 Teoria popytu

1.1 Relacja preferencji konsumenta

Podstawowym powodem działalności ekonomicznej człowieka lub grup ludzkich jest zaspokajanie potrzeb konsumpcyjnych, w ramach możliwości, które daje rynek towarów konsumpcyjnych. Konsument, czyli albo pojedynczy człowiek albo zorganizowana grupa, dokonuje zakupów towarów, czyli produktów pracy lub usług. Do zakupu towarów konsument przeznacza swój dochód, który na początku naszych rozważań będzie ignorowany. Celem tego wykładu jest zbudowanie modelu matematycznego, który pozwoli w sposób formalny (matematyczny) opisywać zjawiska zachodzące na rynku towarów.

Załóżmy, że na rynek oferuje konsumentom m różnych towarów. Przez x_i będziemy oznaczać ilość i-tego towaru mierzoną w odpowiednich jednostkach (kilogramach, litrach, metrach, sztukach itp.).

Oznaczenia. Dowolny wektor

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m = [0, \infty)^m$$

będziemy interpretować jako potencjalny *koszyk* towarów konsumenta. Natomiast przez $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+^m$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich koszyków dostępnych na rynku towarów konsumpcyjnych i nazywać *przestrzenią towarów*.

Przykład 1. Załóżmy, że rynek oferuje tylko dwa towary: wódkę i papierosy. Ilość tych dóbr jest ograniczona, mamy 20 litrów wódki i 1000 papierosów. Wówczas zbiór dostępnych koszyków to

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \leqslant 20, x_2 \leqslant 1000\}.$$

Konsument kieruje się przy wyborze koszyka towarów swoim gustem. Każdy konsument posiada swój indywidualny gust, np. preferencje konsumenta palącego i niepalącego są diametralnie różne. Gusta konsumentów opisuje tzw. *relacja preferencji*.

Definicja. Mówimy, że relacja $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest *relacją słabej preferencji* jeśli jest preporządkiem zupełnym, tzn.

(i) $\forall_{\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathcal{X}} (\overline{x} \succeq \overline{y} \wedge \overline{y} \succeq \overline{z}) \Longrightarrow \overline{x} \succeq \overline{z}$ (tranzytywność);

(ii) $\forall_{\overline{x},\overline{y} \in \mathcal{X}} \overline{x} \succeq \overline{y} \vee \overline{y} \succeq \overline{x}$ (zupełność).

Jeśli $\overline{x} \succeq \overline{y}$ to mówimy, że „koszyk towarów $\overline{x}$ jest słabo preferowany nad koszyk $\overline{y}$” lub „koszyk towarów $\overline{x}$ jest nie gorszy od koszyka $\overline{y}$”.

Uwaga 1.1. Zauważmy, że bezpośrednio z warunku zupełności wynika zwrotność relacji słabej preferencji, tzn. $\overline{x} \succeq \overline{x}$ dla dowolnego koszyka $\overline{x} \in \mathcal{X}$.

Definicja. Polem preferencji konsumenta będziemy nazywać parę $(\mathcal{X}, \succeq)$, gdzie $\mathcal{X}$ jest przestrzenią towarów dostępnych na rynku towarów oraz $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest relacją słabej preferencji charakteryzującą gust konsumenta.

Definicja. Mówimy, że dwa koszyki $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$ są indyferentne lub równoważne jeśli $\overline{x} \succeq \overline{y}$ oraz $\overline{y} \succeq \overline{x}$. Wówczas piszemy $\overline{x} \sim \overline{y}$.

Mówimy, że koszyk $\overline{x} \in \mathcal{X}$ jest silnie preferowany nad koszyk $\overline{y}$, jeśli $\neg(\overline{y} \succeq \overline{x})$. Wówczas piszemy $\overline{x} \succ \overline{y}$.

Jeśli koszyk $\overline{x}$ jest silnie preferowany nad $\overline{y}$, to oznacza, że $\overline{x}$ jest lepszy z punktu widzenia konsumenta od koszyka $\overline{y}$. Jeśli koszyki są indyferentne, to są one równie dobre dla konsumenta.

Ćwiczenie. Relacja indyferencji $\sim \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest relacją równoważności.

Ćwiczenie. Relacja silnej preferencji $\succ \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ spełnia następujące warunki:

(i) $\neg(\overline{x} \succ \overline{x})$;

(ii) $\overline{x} \succ \overline{y} \Longleftrightarrow (\overline{x} \succeq \overline{y}) \wedge \neg(\overline{x} \sim \overline{y})$;

(iii) $\overline{x} \succeq \overline{y} \Longleftrightarrow (\overline{x} \succ \overline{y}) \vee (\overline{x} \sim \overline{y})$;

(iv) $(\overline{x} \succ \overline{y}) \wedge (\overline{y} \succeq \overline{z}) \Longrightarrow (\overline{x} \succ \overline{z})$;

(v) $(\overline{x} \succ \overline{y}) \vee (\overline{y} \succeq \overline{x})$;

(vi) $(\overline{x} \succ \overline{y}) \vee (\overline{y} \succ \overline{x}) \vee (\overline{x} \sim \overline{y})$.

Kolejnym aksjomatem teorii preferencji, po aksjomacie zupełnego preporządku relacji słabej preferencji, jest *aksjomat ciągłości.*

Definicja. Mówimy, że relacja preferencji $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest *ciągła*, gdy zbiór

$$\mathcal{G} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \overline{x} \succ \overline{y}\}$$

jest otwartym w metryce na $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ indukowanej z metryki produktowej na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Uwaga 1.2. Na przestrzeni $\mathbb{R}^m$ rozważać będziemy metrykę pochodzącą od normy $\|\overline{x}\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|$. Jednak wybór takiej właśnie normy nie jest zbyt istotny. Jak wiadomo wszystkie normy na $\mathbb{R}^m$ są równoważne, więc pojęcie zbioru otwartego dla każdej z nich oznacza to samo. Wybór tej właśnie normy podyktowane jest względami estetycznymi. Będziemy jednak korzystać również z normy euklidesowej $\|\overline{x}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$ oraz $|\overline{x}| = \sum_{i=1}^m |x_i|$.

Uwaga 1.3. Ciągłość relacji preferencji oznacza, że dla dowolnej pary nieindyferentnych koszyków $\overline{x} \succ \overline{y}$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\{(\overline{x}', \overline{y}') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \|(\overline{x}', \overline{y}') - (\overline{x}, \overline{y})\| = \sup(\|\overline{x}' - \overline{x}\|, \|\overline{y}' - \overline{y}\|) < \varepsilon\} \subset \mathcal{G}.$$

Zatem jeśli $|x_i' - x_i| < \varepsilon$ oraz $|y_i' - y_i| < \varepsilon$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, to $\overline{x}' \succ \overline{y}'$. To oznacza, że relacja silnej preferencji jest nieczuła na małe zaburzenia koszyków towarów, co wydaje się być naturalnym założeniem.

Twierdzenie 1.4. *Relacja preferencji $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{X}$ zbiory*

$$\mathcal{G}^1(\overline{a}) = \{\overline{y} \in \mathcal{X} : \overline{a} \succ \overline{y}\} \text{ oraz } \mathcal{G}^2(\overline{b}) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \overline{x} \succ \overline{b}\}$$

są otwartymi podzbiorami $\mathcal{X}$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że zbiór $\mathcal{G}$ jest otwarty. Udowodnimy, że dla dowolnego $\overline{a} \in \mathcal{X}$ zbiór $\mathcal{G}^1(\overline{a})$ jest otwarty w $\mathcal{X}$. Otwartości zbioru $\mathcal{G}^2(\overline{b})$ dowodzi się podobnie, co pominiemy.

Niech $\overline{y} \in \mathcal{G}^1(\overline{a})$, zatem $\overline{a} \succ \overline{y}$, czyli $(\overline{a}, \overline{y}) \in \mathcal{G}$. Ponieważ $\mathcal{G} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest otwarty, więc istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $\sup(\|\overline{x}' - \overline{a}\|, \|\overline{y}' - \overline{y}\|) < \varepsilon$ to $\overline{x}' \succ \overline{y}'$. Weźmy dowolny element $\overline{y}' \in \mathcal{X}$ taki, że $\|\overline{y}' - \overline{y}\| < \varepsilon$. Ponieważ $\sup(\|\overline{a} - \overline{a}\|, \|\overline{y}' - \overline{y}\|) < \varepsilon$, więc $\overline{a} \succ \overline{y}'$, a stąd $\overline{y}' \in \mathcal{G}^1(\overline{a})$. W ten sposób pokazaliśmy, że pewne otoczenie $\overline{y}$ w $\mathcal{X}$ zawarte jest w zbiorze $\mathcal{G}^1(\overline{a})$, a zatem $\mathcal{G}^1(\overline{a})$ jest otwarty w $\mathcal{X}$, co kończy dowód w łatwiejszą stronę.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że zbiory $\mathcal{G}^1(\overline{a}), \mathcal{G}^2(\overline{b})$ są otwarte w $\mathcal{X}$ dla dowolnych $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{X}$. Niech $(\overline{a}, \overline{b})$ będzie dowolnym elementem $\mathcal{G}$, czyli $\overline{a} \succ \overline{b}$.

Przypadek 1. Załóżmy, że istnieje $\overline{c} \in \mathcal{X}$ takie, że $\overline{a} \succ \overline{c} \succ \overline{b}$. Wówczas

$$(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathcal{G}^2(\overline{c}) \times \mathcal{G}^1(\overline{c}) \subset \mathcal{G}. \tag{1}$$

Rzeczywiście, jeśli $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{G}^2(\overline{c}) \times \mathcal{G}^1(\overline{c})$, to $\overline{x} \succ \overline{c}$ oraz $\overline{c} \succ \overline{y}$, co z tranzytywności daje $\overline{x} \succ \overline{y}$. Zbiór $\mathcal{G}^2(\overline{c}) \times \mathcal{G}^1(\overline{c})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, jako produkt zbiorów otwartych. Zatem punkt $(\overline{a}, \overline{b})$ posiada otoczenie zawarte w $\mathcal{G}^2(\overline{c}) \times \mathcal{G}^1(\overline{c})$. Z (1), otoczenie to zawarte jest również w $\mathcal{G}$, co dowodzi otwartości $\mathcal{G}$ w $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Przypadek 2. Załóżmy, że nie istnieje $\overline{c} \in \mathcal{X}$ takie, że $\overline{a} \succ \overline{c} \succ \overline{b}$. Oznaczmy

$$\mathcal{F}^1(\overline{a}) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \overline{x} \succeq \overline{a}\} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{G}^1(\overline{a}),$$
$$\mathcal{F}^2(\overline{b}) = \{\overline{y} \in \mathcal{X} : \overline{b} \succeq \overline{y}\} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{G}^2(\overline{b}).$$

Jako dopełnienia zbiorów otwartych są one domknięte w $\mathcal{X}$. Zauważmy, że $\mathcal{F}^1(\overline{a}) \cap \mathcal{F}^2(\overline{b}) = \emptyset$ oraz $\mathcal{G}^1(\overline{a}) \cap \mathcal{G}^2(\overline{b}) = \emptyset$. Rzeczywiście, jeśli $\overline{c} \in \mathcal{F}^1(\overline{a})$ oraz

$\overline{c} \in \mathcal{F}^2(\overline{b})$, to $\overline{c} \succeq \overline{a}$ oraz $\overline{b} \succeq \overline{c}$. Z tranzytywności $\overline{b} \succeq \overline{a}$ co stoi w sprzeczności z założeniem, że $(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathcal{G}$.

Natomiast, jeśli $\overline{c} \in \mathcal{G}^1(\overline{a})$ oraz $\overline{c} \in \mathcal{G}^2(\overline{b})$, to $\overline{a} \succ \overline{c}$ oraz $\overline{c} \succ \overline{b}$, co stoi w sprzeczności z głównym założeniem w Przypadku 2. Ponadto,

$$\mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{G}^1(\overline{a}) \cap \mathcal{G}^2(\overline{b})) = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{G}^1(\overline{a})) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{G}^2(\overline{b})) = \mathcal{F}^1(\overline{a}) \cup \mathcal{F}^2(\overline{b}).$$

Stąd $\mathcal{F}^1(\overline{a}) = \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}^2(\overline{b})$ oraz $\mathcal{F}^2(\overline{b}) = \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}^1(\overline{a})$ i jako dopełnienia zbiorów dotkniętych są otwarte. Następnie zauważmy, że

$$(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathcal{F}^1(\overline{a}) \times \mathcal{F}^2(\overline{b}) \subset \mathcal{G}. \tag{2}$$

Rzeczywiście, jeśli $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{F}^1(\overline{a}) \times \mathcal{F}^2(\overline{b})$, to $\overline{x} \succeq \overline{a}$ oraz $\overline{b} \succeq \overline{y}$. Ponieważ $\overline{a} \succ \overline{b}$, z tranzytywności otrzymujemy $\overline{x} \succ \overline{y}$. Zbiór $\mathcal{F}^1(\overline{a}) \times \mathcal{F}^2(\overline{b})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, jako produkt zbiorów otwartych. Zatem punkt $(\overline{a}, \overline{b})$ posiada otoczenie zawarte w $\mathcal{F}^1(\overline{a}) \times \mathcal{F}^2(\overline{b})$. Z (2), otoczenie to zawarte jest również w $\mathcal{G}$. W ten sposób udowodniliśmy otwartość zbioru $\mathcal{G}$, co kończy dowód. $\square$

Załóżmy teraz, że możliwości budżetowe konsumenta są ograniczone, wtedy nie wszystkie koszyki ze zbioru koszyków towarów $\mathcal{X}$ są osiągalne. Oznaczmy przez $M \subset \mathcal{X}$ zbiór koszyków osiągalnych przez konsumenta.

Definicja. Niech $(X, \succeq)$ będzie polem preferencji konsumenta oraz niech M będzie niepustym podzbiorem przestrzeni towarów $\mathcal{X}$. Mówimy, że element $\overline{x} \in M$ jest *M-preferowanym koszykiem* jeśli $\overline{x} \succeq \overline{y}$ dla każdego koszyka $\overline{y} \in M$.

Koszyk M-preferowany możemy zinterpretować jako, w pewnym sensie najlepszy koszyk dla konsumenta, przy jego ograniczeniach budżetowych. Koszyk ten jest nie gorszy od wszystkich osiągalnych koszyków.

Przypomnienie. Podzbiór A przestrzni metrycznej (X, ρ) jest *zwarty*, gdy spełnia jeden z trzech równoważnych warunków

(i) dowolny ciąg elementów z A posiada podciąg zbieżny do elementu z A;

(ii) dla dowolnego pokrycia zbioru A zbiorami otwartymi $(U_t)_{t\in T}$ ($A \subset \bigcup_{t\in T} U_t$) istnieje podpokrycie skończone, tzn. $A \subset U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}$;

(iii) dla dowolnej rodziny $(F_t)_{t\in T}$ domkniętych podzbiorów A jeśli $\bigcap_{t\in T'} F_t \neq \emptyset$ dla dowolnego skończonego podzbioru $T' \subset T$, to $\bigcap_{t\in T} F_t \neq \emptyset$

Twierdzenie 1.5. *Załóżmy, że relacja preferencji $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest ciągła oraz zbiór $M \subset \mathcal{X}$ jest niepusty i zwarty. Wówczas istnieje co najmniej jeden koszyk M-preferowany oraz zbiór koszyków M-preferowanych jest zwarty.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że zbiór koszyków M-preferowanych jest równy

$$\widetilde{M} := \bigcap_{\overline{y}\in M} (\mathcal{F}^1(\overline{y}) \cap M) = M \cap \bigcap_{\overline{y}\in M} \mathcal{F}^1(\overline{y}),$$

gdzie przypomnijmy $\mathcal{F}^1(\overline{y}) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \overline{x} \succeq \overline{y}\}$. Istotnie $\overline{x} \in \widetilde{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{x} \in M$ oraz $\overline{x} \in \mathcal{F}^1(\overline{y})$ dla każdego $\overline{y} \in M$. To oznacza, że $\overline{x} \succeq \overline{y}$ dla każdego $\overline{y} \in M$, co jest równoważne z tym, że $\overline{x}$ jest M-preferowany.

Z ciągłości relacji preferencji każdy ze zbiorów $\mathcal{F}^1(\overline{y})$, $\overline{y} \in M$ jest domknięty, a zatem $\mathcal{F}^1(\overline{y}) \cap M$, $\overline{y} \in M$ są zbiorami niepustymi i zwartymi. Ponieważ wszystkie te zbiory są podzbiorami zbioru zwartego M, wystarczy pokazać, że przekrój dowolnej skończonej podrodziny jest niepusty, to implikuje niepustość przekroju całej rodziny.

Rozważmy zatem dowolną taką skończoną rodzinę $\mathcal{F}^1(\overline{y_i}) \cap M$, $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $\overline{y}_i \in M$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Ponieważ relacja preferencji jest zupełnym preporządkiem, w skończonym zbiorze $\{\overline{y_i} : i = 1, \ldots, k\}$ istnieje element nie gorszy od wszystkich innych w tym zbiorze, oznaczmy ten element przez $\overline{y}_{i_0}$. Wówczas

$$\mathcal{F}^1(\overline{y_{i_0}}) \subset \mathcal{F}^1(\overline{y_i}) \text{ dla każdego } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Istotnie, jeśli $\overline{x} \in \mathcal{F}^1(\overline{y_{i_0}})$, to $\overline{x} \succeq \overline{y}_{i_0}$, a ponieważ $\overline{y}_{i_0} \succeq \overline{y}_i$, więc z tranzytywności $\overline{x} \succeq \overline{y}_i$, a stąd $\overline{x} \in \mathcal{F}^1(\overline{y_i})$. Tak więc

$$\mathcal{F}^1(\overline{y_{i_0}}) \cap M = \bigcap_{i=1}^{k} (\mathcal{F}^1(\overline{y_i}) \cap M).$$

Ponieważ zbiór $\mathcal{F}^1(\overline{y_{i_0}}) \cap M$ jest niepusty, to przekrój $\bigcap_{i=1}^{k} (\mathcal{F}^1(\overline{y_i}) \cap M)$ jest również niepusty. Zatem ze zwartości M zbiór $\widetilde{M} = \bigcap_{\overline{y}\in M} (\mathcal{F}^1(\overline{y}) \cap M)$ jest niepusty i jako przekrój zbiorów zwartych jest też zwarty. □

Definicja. Mówimy, że pole preferencji $(\mathcal{X}, \succeq)$ jest *słabo wypukłe*, jeśli

(i) przestrzeń towarów $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m_+$ jest podzbiorem wypukłym;

(ii) dla dowolnego $\overline{y} \in \mathcal{X}$ zbiór $\mathcal{F}^1(\overline{y}) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \overline{x} \succeq \overline{y}\}$ jest wypukły.

Uwaga 1.6. Powyższy aksjomat słabej wypukłości oznacza, że dla dowolnego koszyka $\overline{y}$ jeśli dwa koszyki $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ są słabo preferowane nad $\overline{y}$, to każdy koszyk pośredni postaci $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2$, gdzie $\alpha, \beta \geqslant 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$, jest również słabo preferowany nad koszyk $\overline{y}$, co wydaje się naturalnym założeniem.

Obecnie sformułujemy aksjomat silnej wypukłości pola preferencji konsumenta. Aksjomat ten pozwoli na udowodnienie jednoznaczności koszyka M-preferowanego.

Definicja. Mówimy, że pole preferencji $(\mathcal{X}, \succeq)$ jest *silnie wypukłe*, jeśli

(i) przestrzeń towarów $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m_+$ jest podzbiorem wypukłym;

(ii) dla dowolnego $\overline{y} \in \mathcal{X}$ jeśli $\overline{x}_1 \succeq \overline{y}, \overline{x}_2 \succeq \overline{y}$ oraz $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$, to dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$ mamy $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \succ \overline{y}$.

Twierdzenie 1.7. *Załóżmy, że pole preferencji konsumenta $(\mathcal{X}, \succeq)$ jest słabo wypukłe oraz zbiór $M \subset \mathcal{X}$ jest również wypukły. Wówczas zbiór koszyków M-preferowanych jest wypukły. Jeśli dodatkowo pole preferencji jest silnie wypukłe, to istnieje co najwyżej jeden M-preferowany koszyk.*

Dowód. Przypomnijmy, że zbiór koszyków M-preferowanych jest postaci

$$\widetilde{M} = \bigcap_{\overline{y} \in M} (\mathcal{F}^1(\overline{y}) \cap M).$$

Ponieważ, z założenia, zbiory $\mathcal{F}^1(\overline{y})$ oraz M są wypukłe, więc ich przekrój jest też zbiorem wypukłym. Zatem $\widetilde{M}$ jest wypukły.

Załóżmy dodatkowo, że pole preferencji konsumenta jest silnie wypukłe. Przypuśćmy, że zbiór koszyków M-preferowanych zawiera co najmniej dwa różne elementy $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in M$. Z zupełności relacji preferencji możemy przyjąć, że $\overline{x}_1 \succeq \overline{x}_2$. Zatem z założenia silnej wypukłości dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ mamy $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \succ \overline{x}_2$. Ponieważ M jest zbiorem wypukłym, więc $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \in M$. Zatem istnieje element zbioru M, który jest silniej preferowany od $\overline{x}_2$, czyli $\overline{x}_2$ nie może być M-preferowany. Daje to sprzeczność z założeniem, że zbiór koszyków M-preferowanych ma więcej niż jeden element. □

Wniosek 1.8. *Załóżmy, że relacja preferencji $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest ciągła i słabo wypukła oraz zbiór $M \subset \mathcal{X}$ jest niepusty, zwarty oraz wypukły. Wówczas zbiór koszyków M-preferowanych jest niepusty, zwarty i wypukły. Jeśli dodatkowo pole preferencji jest silnie wypukłe, to istnieje dokładnie jeden M-preferowany koszyk.*

1.2 Funkcja użyteczności

Znacznie wygodniejszą formą przedstawienia gustu konsumenta jest przedstawienie go w sposób liczbowy przy pomocy tzw. *funkcji użyteczności.* Jest to funkcja, która każdemu koszykowi z przestrzeni towarów przypisuje wartość liczbową, tak aby bardziej wartościowym koszykom, z punktu widzenia konsumenta, przypisane były większe wartości.

Definicja. Niech $(\mathcal{X}, \succeq)$ będzie polem preferencji konsumenta. Funkcję $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją użyteczności*, gdy

$$u(\overline{x}) > u(\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{x} \succ \overline{y} \text{ oraz } u(\overline{x}) \geqslant u(\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{x} \succeq \overline{y}.$$

Uwaga 1.9. Z drugiej strony dowolna funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ wyznacza relację słabej preferencji zdefiniowaną następująco: $\overline{x} \succeq \overline{y}$, gdy $u(\overline{x}) \geqslant u(\overline{y})$. Sprawdzić, że $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ jest zupełnym preporządkiem (ćwiczenie).

Ćwiczenie. Jeśli $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest funkcją użyteczności dla relacji $\succeq$, to $u(\overline{x}) = u(\overline{y})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{x} \sim \overline{y}$.

Ćwiczenie. Jeśli $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest funkcją użyteczności dla relacji $\succeq$, to dla dowolnej funkcji rosnącej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $g \circ u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest funkcją użyteczności dla relacji $\succeq$.

Uwaga 1.10. Niech $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności dla relacji $\succeq$. Jeśli u jest funkcją ciągłą, to relacja $\succeq$ jest również ciągła. Aby to pokazać wystarczy zauważyć, że zbiory

$$\mathcal{G}^1(\overline{a}) = \{\overline{y} \in \mathcal{X} : \overline{a} \succ \overline{y}\} = \{\overline{y} \in \mathcal{X} : u(\overline{a}) > u(\overline{y})\} = u^{-1}(-\infty, u(\overline{a})),$$

$$\mathcal{G}^2(\overline{b}) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \overline{x} \succ \overline{b}\} = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : u(\overline{x}) > u(\overline{b})\} = u^{-1}(u(\overline{b}), +\infty)$$

jako przeciwobrazy zbiorów otwartych są również otwarte. Teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia 1.4.

Twierdzenie 1.11. *Niech $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m_+$ będzie podzbiorem spójnym oraz $\succeq \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ ciągłą relacją preferencji. Wówczas istnieje funkcja użyteczności $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dla relacji $\succeq$.*

Dowód. Patrz [1]. □

Definicja. Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest *quasi-wklęsła*, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej r zbiór $u^{-1}([r, +\infty)) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : u(\overline{x}) \geqslant r\}$ jest wypukły.

Mówimy, że funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest *silnie quasi-wklęsła*, gdy dla każdego $\overline{y} \in \mathcal{X}$, jeśli $u(\overline{x}_1) \geqslant u(\overline{y})$, $u(\overline{x}_2) \geqslant u(\overline{y})$ dla $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2 \in \mathcal{X}$, to $u(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) > u(\overline{y})$ dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$.

Uwaga 1.12. Korzystając z określenia funkcji użyteczności dla danej relacji preferencji łatwo zauważyć, że

(i) funkcja użyteczności u jest quasi-wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy relacja preferencji $\succeq$ jest wypukła;

(ii) funkcja użyteczności u jest silnie quasi-wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy relacja preferencji $\succeq$ jest silnie wypukła;

Lemat 1.13. *Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest zbiorem wypukłym. Jeśli $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest wklęsła, to jest quasi-wklęsła oraz jeśli u jest silnie wklęsła, to jest silnie quasi-wklęsła*

Dowód. Przypomnijmy, że funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze wypukłym jest wklęsła, gdy dla dowolnych $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathcal{X}$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ mamy

$$u(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) \geqslant \alpha u(\overline{x}_1) + \beta u(\overline{x}_2).$$

Wówczas jeśli $u(\overline{x}_1) \geqslant r$ oraz $u(\overline{x}_2) \geqslant r$, to

$$u(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) \geqslant \alpha u(\overline{x}_1) + \beta u(\overline{x}_2) \geqslant \alpha r + \beta r = r.$$

Zatem zbiór $\{\overline{x} \in \mathcal{X} : u(\overline{x}) \geqslant r\}$ jest wypukły, a więc u jest quasi-wklęsła.

Przypomnijmy, że funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest silnie wklęsła, gdy dla dowolnych $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2 \in \mathcal{X}$ oraz $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ mamy

$$u(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) > \alpha u(\overline{x}_1) + \beta u(\overline{x}_2).$$

Załóżmy, że $u(\overline{x}_1) \geqslant u(\overline{y})$ oraz $u(\overline{x}_2) \geqslant u(\overline{y})$ oraz $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$. Wtedy

$$u(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) > \alpha u(\overline{x}_1) + \beta u(\overline{x}_2) \geqslant \alpha u(\overline{y}) + \beta u(\overline{y}) = u(\overline{y}).$$

Zatem u jest silnie quasi-wklęsła. □

Następny aksjomat dotyczący relacji preferencji związany jest ze zjawiskiem niedosytu.

Oznaczenia. Na $\mathbb{R}^m_+$ będziemy rozpatrywać następującą relację częściowego porządku $\geqslant \subset \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$

$$\overline{x} \geqslant \overline{y} \Leftrightarrow \forall_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i \geqslant y_i.$$

Będziemy również korzystać z następujących dwóch relacji:

$$\overline{x} \gtrdot \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} \geqslant \overline{y} \wedge \overline{x} \neq \overline{y} \text{ oraz } \overline{x} > \overline{y} \Leftrightarrow \forall_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i > y_i.$$

Definicja. Mówimy, że w polu preferencji konsumenta $(\mathcal{X}, \succeq)$ obserwujemy *zjawisko niedosytu*, gdy

$$\overline{x} \gtrdot \overline{y} \Rightarrow \overline{x} \succ \overline{y}.$$

Uwaga 1.14. Niech $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności dla relacji $\succeq$. Wówczas w polu preferencji $(\mathcal{X}, \succeq)$ występuje niedosyt wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca, tzn.

$$\overline{x} \gtrdot \overline{y} \Rightarrow u(\overline{x}) > u(\overline{y}).$$

Lemat 1.15. *Jeśli funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}) > 0 \text{ dla wszystkich } \overline{x} \in \mathbb{R}_+^m \text{ oraz } 1 \leqslant i \leqslant m,$$

to jest rosnąca.

Dowód. Załóżmy, że wszystkie pochodne cząstkowe są dodatnie oraz $\overline{x} \gtrdot \overline{y}$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji $\varphi(t) = u(t\overline{x} + (1-t)\overline{y})$ istnieje $0 < \theta < 1$ takie, że

$$u(\overline{x}) - u(\overline{y}) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta\overline{x} + (1-\theta)\overline{y})(x_i - y_i).$$

Ponieważ wszystkie pochodne cząstkowe są dodatnie, wszystkie różnice $x_i - y_i$ są nieujemne i przynajmniej jedna z nich jest dodatnia, więc prawa strona jest dodatnia. Stąd $u(\overline{x}) > u(\overline{y})$. □

Uwaga 1.16. Jeśli funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2, wówczas warunek wklęsłości i silnej wklęsłości można sprawdzać korzystając z macierzy drugiej pochodnej (hesjanu)

$$H(\overline{x}) = \frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}(\overline{x}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m}(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_m}(\overline{x}) \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że jeśli $H(\overline{x})$ jest niedodatnio określona dla wszystkich $\overline{x}$, to u jest wklęsła oraz jeśli $H(\overline{x})$ jest ujemnie określona dla wszystkich $\overline{x}$, to u jest silnie wklęsła.

Podamy teraz listę standardowych funkcji $u : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$, które spełniają warunki funkcji użyteczności.

Przykład 2 (Funkcja logarytmiczna). Niech

$$u(x_1, \ldots, x_m) = a + \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_m \ln x_m,$$

gdzie $a > 0$ oraz $\alpha_i > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Wówczas $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}) = \frac{\alpha_i}{x_i} > 0$ oraz hesjan $H(\overline{x})$ jest macierzą diagonalną, przy czym na przekątnej znajdują się $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\overline{x}) = -\frac{\alpha_i}{x_i^2} < 0$ dla $i = 1, \ldots, m$. Zatem $H(\overline{x})$ jest zawsze ujemnie określona. Podsumowując relacja preferencji wyznaczona przez funkcję logarytmiczną jest ciągła, silnie wypukła oraz spełnia warunek niedosytu.

Przykład 3 (Funkcja multiplikatywna). Niech

$$u(x_1, \ldots, x_m) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m},$$

gdzie $a > 0$ oraz $\alpha_i > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Zauważmy, że funkcja multiplikatywna powstaje przez złożenie funkcji logarytmicznej z funkcją wykładniczą $x \mapsto e^x$, która jest rosnąca. Zatem wyznaczona przez u relacja preferencji ma te same własności co relacja wyznaczona przez funkcję logarytmiczną.

Przykład 4 (Funkcja addytywna). Niech

$$u(x_1, \ldots, x_m) = a(x_1^{\alpha_1} + \ldots + x_m^{\alpha_m}),$$

gdzie $a > 0$ oraz $0 < \alpha_i < 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Wówczas $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}) = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} > 0$ oraz hesjan $H(\overline{x})$ jest macierzą diagonalną, przy czym na przekątnej znajdują się $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\overline{x}) = \alpha_i(\alpha_i - 1)x_i^{\alpha_i - 2} < 0$ dla $i = 1, \ldots, m$. Zatem $H(\overline{x})$ jest zawsze ujemnie określona.

Przykład 5 (Funkcja kwadratowa). Niech

$$u(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} x_i x_j,$$

gdzie macierz $B = [b_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ jest ujemnie określona. Wówczas $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}) = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j$. Zatem aby funkcja u była rosnąca musimy dodatkowo założyć, że $a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j > 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $\overline{x} \in \mathbb{R}_+^m$. Dla funkcji kwadratowej hesjan $H(\overline{x})$ jest równy macierzy B, co daje ujemną określoność.

1.3 Interpretacje ekonomiczne

Definicja. Niech $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności klasy C^1. Pochodną cząstkową $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}$ nazywamy *krańcową użytecznością* i-tego towaru w koszyku $\overline{x}$.

Ze względu na założenie niedosytu $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} > 0$, ponadto,

$$u(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_m) - u(x_1, \ldots, x_m) \approx \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} > 0.$$

Zatem krańcowa użyteczność i-tego towaru mierzy wzrost użyteczności koszyka $\overline{x} \in \mathcal{X}$ przy zwiększeniu ilości i-tego towaru w koszyku o jedną jednostkę.

Uwaga 1.17. Załóżmy, że funkcja użyteczności u jest klasy C^1 oraz silnie wklęsła. Wówczas funkcja jednej zmiennej $x \mapsto u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ jest silnie wklęsła i jej pochodna równa $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}$ jest malejąca. Zatem krańcowa użyteczność i-tego towaru maleje ze wzrostem konsumpcji tego towaru. Własność tę ekonomiści nazywają *prawem Gossena* (niemiecki ekonomista, 1810-58)

Uwaga 1.18. Przypomnijmy, że iloraz różnicowy

$$\frac{u(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)}{\Delta x}$$

jest stosunkiem bezwzględnego przyrostu użyteczności do przyrostu ilości i-tego towaru, czyli mówi o wzroście zadowolenia przy zwiększeniu ilości towaru o Δx.

Z punktu widzenia ekonomisty bardziej interesująca jest wiedza o procentowym wzroście zadowolenia, czyli o ile procent wzrosło zadowolenie jeśli wiemy o ile procent więcej jest i-tego towaru. Wówczas należy policzyć następujący iloraz

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)}{u(x_1, \ldots, x_m)} \Bigg/ \frac{\Delta x}{x_i} \\ = \quad & \frac{u(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)}{\Delta x} \frac{x_i}{u(\overline{x})}. \end{aligned}$$

Przechodząc z przyrostem Δx do zera, w granicy otrzymamy

$$E_{x_i}(u) := \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} \frac{x_i}{u(\overline{x})}.$$

Liczbę $E_{x_i}(u)$ nazywamy *elastycznością funkcji* względem i-tej zmiennej.

Przykład 6. Niech $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją potęgową jednej zmiennej $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$. Wówczas

$$E_x(u) = \frac{u'(x)x}{u(x)} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} x}{x^\alpha} = \alpha.$$

Definicja. Niech $u : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności klasy C^1. Dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}_+^m : u(\overline{x}) = a\},$$

nazywamy *powierzchnią obojętności* na poziomie użyteczności a.

Powierzchnia obojętności jest zbiorem rozwiązań równania

$$u(\overline{x}) = u(x_1, \ldots, x_m) = a. \tag{3}$$

Załóżmy, że $\frac{\partial u}{\partial x_j} > 0$ dla $j = 1, \ldots, m$ (zjawisko niedosytu). Z twierdzenia o funkcji uwikłanej, lokalnie wokół każdego rozwiązania, istnieje funkcja g_j klasy C^1 zależąca od $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$ taka, że przy ustalonych $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$ koszyk

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, g_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m), x_{j+1}, \ldots, x_m)$$

leży na powierzchni obojętności oraz jest jedynym takim koszykiem.

Definicja. Niech $i \neq j$. Pochodną cząstkową

$$s_{ij}(\overline{x}) := -\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)$$

nazywamy *krańcową stopą substytucji* i-tego towaru przez j-ty towar w koszyku $\overline{x}$. Natomiast pochodną cząstkową

$$\epsilon^s_{ij}(\overline{x}) := -\frac{\partial g_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)}{\partial x_i} \frac{x_i}{g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)}$$

nazywamy *elastycznością substytucji* i-tego towaru przez j-ty towar w koszyku $\overline{x}$.

Uwaga 1.19. Ponieważ dla $i \neq j$

$$g_j(\ldots, x_i - \Delta x_i, \ldots) \approx g_j(\ldots, x_i, \ldots) - \Delta x_i \frac{\partial g_j(\ldots, x_i, \ldots)}{\partial x_i} = x_j + \Delta x_i s_{ij}(\overline{x}),$$

więc

$$u(\overline{x}) = u(x_1, \ldots, x_i - \Delta x_i, \ldots, x_j + \Delta x_i \cdot s_{ij}(\overline{x}), \ldots, x_m).$$

Zatem krańcowa stopa substytucji $s_{ij}(\overline{x})$ mówi, o ile zwiększyć ilość j-tego towaru przy ubytku jednej jednostki i-tego towaru tak, aby użyteczność koszyka pozostała taka sama. Natomiast elastycznością substytucji $\epsilon^s_{ij}(\overline{x})$ mówi, o ile procent należy zwiększyć ilość j-tego towaru aby zrekompensować jednoprocentowy ubytek i-tego towaru.

Obie wielkości można jednak wyznaczyć bez rozwikływania równania (3). Różniczkując stronami względem zmiennej x_i wyrażenia

$$u(x_1, \ldots, x_{j-1}, g_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m), x_{j+1}, \ldots, x_m) = a,$$

dla $i \neq j$ otrzymujemy

$$\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) = 0.$$

Zatem

$$s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j}$$

oraz

$$\epsilon^s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{x_i}{x_j}.$$

Przykład 7. Dla funkcji użyteczności postaci $a + \sum_{i=1}^m \alpha_i \log x_i$ lub $a \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$ mamy

$$s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i} \quad \text{oraz} \quad \epsilon^s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}.$$

Dla funkcji użyteczności postaci $a + \sum_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$ mamy

$$s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{x_j^{\alpha_j - 1}} \quad \text{oraz} \quad \epsilon^s_{ij}(\overline{x}) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_i^{\alpha_i}}{x_j^{\alpha_j}}.$$

1.4 Funkcja popytu

Obecnie zajmiemy się problemem maksymalizowania zadowolenia konsumenta biorąc pod uwagę jego ograniczenia budżetowe. Zakładamy, że konsument dysponuje pewnym dochodem $I > 0$. Ponadto, zakładamy, że każdy towar ma ustaloną cenę kupna. Ceny towarów będziemy reprezentować w postaci *wektora cen towarów*

$$\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) > \overline{0},$$

tzn. $p_i > 0$ jest ceną i-tego towaru. Oznaczmy przez $D(\overline{p}, I)$ zbiór koszyków, które są osiągalne dla konsument dysponującego dochodem $I \geqslant 0$, zatem

$$D(\overline{p}, I) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m_+ : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leqslant I\}.$$

Uwaga 1.20. Zauważmy, że zbiór $D(\overline{p}, I)$ jest zwarty i wypukły. Rzeczywiście, jeśli $\overline{x} \in D(\overline{p}, I)$, to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant m$ mamy

$$p_i x_i \leqslant \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leqslant I \text{ stąd } 0 \leqslant x_i \leqslant I/p_i.$$

Zatem zbiór $D(\overline{p}, I)$ jest zawarty w kostce $\prod_{i=1}^m [0, I/p_i]$, więc jest ograniczony. Ponadto, jest on domknięty ponieważ jest przeciwobrazem poprzez odwzorowanie ciągłe $\overline{x} \mapsto \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle$ zbioru domkniętego $[0, I]$.

Zauważmy również, że jeśli $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in D(\overline{p}, I)$, to dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ mamy

$$\langle \overline{p}, \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \rangle = \alpha\langle \overline{p}, \overline{x}_1 \rangle + \beta\langle \overline{p}, \overline{x}_2 \rangle \leqslant \alpha I + \beta I = I.$$

Stąd $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \in D(\overline{p}, I)$, co daje wypukłość zbioru $D(\overline{p}, I)$.

Twierdzenie 1.21. *Jeśli funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ jest ciągła i silnie wklęsła, to dla dowolnej pary $(\overline{p}, I)$, $\overline{p} > \overline{0}$, $I \geqslant 0$ istnieje dokładnie jeden koszyk $D(\overline{p}, I)$-preferowany.*

Dowód. Twierdzenie wynika bezpośrednio z wniosku 1.8. □

Oznaczenia. Jedyny $D(\overline{p}, I)$-preferowany koszyk, którego istnienie właśnie dowiedliśmy, będziemy oznaczać przez $\varphi(\overline{p}, I)$. Jest to najkorzystniejszy dla konsumenta koszyk, który dysponuje dochodem I, przy cenach towarów wyznaczonych przez wektor $\overline{p}$. Wyznaczenie koszyka $\varphi(\overline{p}, I)$ sprowadza się do rozwiązania zadania z programowania wypukłego następującej postaci:

$$\text{wyznaczyć maksimum } u(\overline{x}) \text{ przy ograniczeniach } \overline{x} \geqslant \overline{0},\ \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leqslant I. \tag{4}$$

Rozważmy funkcję $\varphi : \operatorname{Int} \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m_+$, która wskazuje w jaki sposób zmienia się najbardziej wartościowy koszyk przy zmianach cen towarów oraz dochodów konsumenta. W trywialnym przypadku, gdy dochód $I = 0$ mamy $D(\overline{p}, I) = \{\overline{0}\}$, a wtedy $\varphi(\overline{p}, I) = \overline{0}$.

Definicja. Funkcję $\varphi : \operatorname{Int} \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m_+$ nazywamy *funkcją popytu konsumpcyjnego* na towary w zależności od ich cen i dochodu konsumenta.

Twierdzenie 1.22. *Jeśli funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ jest ciągła i silnie wklęsła, to funkcja popytu $\varphi : \operatorname{Int} \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m_+$ jest ciągła.*

Dowód. Rozważmy ciąg $\{(\overline{p}^n, I^n)\}$ zbieżny w $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ do $(\overline{p}, I)$ $(\overline{p} > \overline{0})$. Niech $\overline{x}^n = \varphi(\overline{p}^n, I^n)$ oraz $\hat{\overline{x}} = \varphi(\overline{p}, I)$. Musimy udowodnić, że $\overline{x}^n \to \hat{\overline{x}}$.

Najpierw zauważmy, że ciąg $\{\overline{x}^n\}$ jest ograniczony. W przeciwnym razie $\|\overline{x}^{k_n}\| \to +\infty$ wzdłuż pewnego podciągu. Ponadto,

$$+\infty = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^m x_i^{k_n} \leftarrow \min_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i^{k_n} \sum_{i=1}^m x_i^{k_n} \leqslant \langle \overline{p}^{k_n}, \overline{x}^{k_n} \rangle \leqslant I^{k_n} \to I,$$

co daje sprzeczność. Ponieważ ciąg $\{\overline{x}^n\}$ jest ograniczony więc wystarczy pokazać, że dowolny jego podciąg zbieżny ma granicę równą $\hat{\overline{x}}$.

Niech $\{\overline{x}^{k_n}\}$ będzie podciągiem zbieżnym do wektora $\overline{x}^0$. Ponieważ $\overline{x}^{k_n} \in D(\overline{p}^{k_n}, I^{k_n})$, więc

$$\langle \overline{x}^0, \overline{p} \rangle = \lim \langle \overline{x}^{k_n}, \overline{p}^{k_n} \rangle \leqslant \lim I^{k_n} = I. \tag{5}$$

Stąd $\overline{x}^0 \in D(\overline{p}, I)$, zatem $u(\overline{x}^0) \leqslant u(\widehat{\overline{x}})$. Jeśli $I = 0$, to $\widehat{\overline{x}} = \varphi(\overline{p}, I) = \overline{0}$ oraz z nierówności (5) mamy $\langle \overline{x}^0, \overline{p} \rangle = 0$. Stąd $\overline{x}^0 = \overline{0} = \widehat{\overline{x}}$.

Załóżmy więc, że $I > 0$. Zauważmy, że

$$\liminf_{n\to\infty} dist(\widehat{\overline{x}}, D(\overline{p}^{k_n}, I^{k_n})) = 0. \tag{6}$$

W przeciwnym przypadku istnieje $\varepsilon > 0$ oraz n_0 takie, że

$$dist(\widehat{\overline{x}}, D(\overline{p}^{k_n}, I^{k_n})) > \varepsilon > 0 \text{ dla } n \geqslant n_0,$$

zatem

$$K(\widehat{\overline{x}}, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^m_+ \subset \mathbb{R}^m_+ \setminus D(\overline{p}^{k_n}, I^{k_n}) \text{ dla } n \geqslant n_0.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $\overline{x} \in K(\widehat{\overline{x}}, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^m_+$ mamy

$$\langle \overline{x}, \overline{p} \rangle = \lim \langle \overline{x}, \overline{p}^{k_n} \rangle \geqslant \lim I^{k_n} = I.$$

Ponieważ $I > 0$, więc istnieje $0 < \theta < 1$ takie, że $\theta\widehat{\overline{x}} \in K(\widehat{\overline{x}}, \varepsilon)$. Wówczas

$$\langle \widehat{\overline{x}}, \overline{p} \rangle > \theta \langle \widehat{\overline{x}}, \overline{p} \rangle = \langle \theta\widehat{\overline{x}}, \overline{p} \rangle \geqslant I.$$

Z drugiej strony $\widehat{\overline{x}} = \varphi(\overline{p}, I) \in D(\overline{p}, I)$, więc $\langle \widehat{\overline{x}}, \overline{p} \rangle$ i sprzeczność, co dowodzi (6).

Na podstawie (6) istnieje ciąg $\{\overline{y}^{k_{l_n}}\}$ taki, że

$$\overline{y}^{k_{l_n}} \in D(\overline{p}^{k_{l_n}}, I^{k_{l_n}}) \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \|\widehat{\overline{x}} - \overline{y}^{k_{l_n}}\| = 0.$$

Zatem $u(\overline{y}^{k_{l_n}}) \leqslant u(\overline{x}^{k_{l_n}})$, a z ciągłości funkcji u mamy

$$u(\widehat{\overline{x}}) = \lim_{n\to\infty} u(\overline{y}^{k_{l_n}}) \leqslant \lim_{n\to\infty} u(\overline{x}^{k_{l_n}}) = u(\overline{x}^0).$$

Ponieważ $\overline{x}^0 \in D(\overline{p}, I)$ (z (5)) oraz w $\overline{x}^0$ funkcja przyjmuje wartość nie mniejszą od wartości największej na zbiorze $D(\overline{p}, I)$, więc $\overline{x}^0 = \varphi(\overline{p}, I) = \widehat{\overline{x}}$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Załóżmy, że przestrzeń towarów $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m_+$ spełnia warunek

$$\begin{gathered}\text{dla dowolnego ciągu } \{\overline{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ w } \mathcal{X} \text{ takiego, że } x^n_{i_0} \to +\infty \text{ dla} \\ \text{pewnego } 1 \leqslant i_0 \leqslant m, \text{ mamy } x^n_i \to +\infty \text{ dla każdego } 1 \leqslant i \leqslant m.\end{gathered} \tag{7}$$

Wówczas dla dowolnego $\overline{p} > \overline{0}$ oraz $I \geqslant 0$ zbiór

$$D(\overline{p}, I) = \{\overline{x} \in \mathcal{X} : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leqslant I\}.$$

jest zwarty i wypukły. Domkniętość i wypukłość pokazuje się jak w ogólnym przypadku, pozostaje więc ograniczoność, która jest kłopotliwa, gdy któraś ze współrzędnych wektora cen $\overline{p}$ jest zerowa. Załóżmy, że zbiór $D(\overline{p}, I)$ nie jest ograniczony. Wówczas istnieje ciąg $\{\overline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ w $\mathcal{X}$ taki, że

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^n = \|\overline{x}^n\| \to +\infty \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Przechodząc do podciągu otrzymujemy, że istnieje współrzędna $1 \leqslant i_0 \leqslant m$ taka, że $x_{i_0}^n \to +\infty$. Z założenia (7) mamy

$$x_i^n \to +\infty \text{ dla dowolnego } 1 \leqslant i \leqslant m,$$

a stąd $\inf_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^n \to +\infty$. Ponieważ $\sum_{i=1}^m p_i > 0$ otrzymujemy stąd

$$+\infty \leftarrow \sum_{i=1}^m p_i \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^n \leqslant \langle \overline{p}, \overline{x}^n \rangle \leqslant I$$

i sprzeczność.

Stosując ponownie wniosek 1.8 otrzymujemy, że dla dowolnych $\overline{p} > \overline{0}$, $I \geqslant 0$ istnieje dokładnie jeden koszyk $D(\overline{p}, I)$-preferowany, który tak jak w poprzednio będziemy oznaczać przez $\varphi(\overline{p}, I)$.

Twierdzenie 1.23. *Załóżmy, że przestrzeń towarów $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+^m$ spełnia warunek (7) oraz funkcja użyteczności $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i silnie wklęsła. Wówczas funkcja popytu $\varphi : (\mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\}) \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$ jest ciągła.*

Dowód. Dowód jest niemal kopią dowodu twierdzenia 1.22. Jedyna istotna różnica występuje w dowodzie ograniczoności ciągu $\{\overline{x}^n\}$, gdzie $\overline{x}^n = \varphi(\overline{p}^n, I^n)$. Załóżmy, że ciąg $\{\overline{x}^n\}$ nie jest ograniczony. Wówczas $\|\overline{x}^{k_n}\| \to +\infty$ wzdłuż pewnego podciągu. Korzystając z warunku (7) mamy $\inf_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^{k_n} \to +\infty$. Stąd

$$+\infty = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \lim_{n \to \infty} \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^{k_n} \leftarrow \sum_{i=1}^m p_i^{k_n} \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^{k_n} \leqslant \langle \overline{p}^{k_n}, \overline{x}^{k_n} \rangle \leqslant I^{k_n} \to I$$

i sprzeczność.

W pozostałą część dowodu pozostawiamy jako ćwiczenie. □

W przypadku, gdy funkcja użyteczności jest klasy C^2 narzędziem pomocnym do znajdowania rozwiązań problemu (4) jest następujące twierdzenie Kuhna-Tuckera.

Twierdzenie 1.24. *Niech* $u : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją klasy* C^2 *taką, że* $\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}(\overline{x})$ *jest ujemnie określona oraz* $\frac{\partial u}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) > \overline{0}$ *dla wszystkich* $\overline{x} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^m_+$. *Niech* $\overline{p} > \overline{0}$. *Rozważmy stowarzyszoną funkcję Lagrange'a*

$$L : \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad L(\overline{x}, \lambda) = u(\overline{x}) + \lambda(I - \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle).$$

Wówczas $\overline{x}^0 \in \mathbb{R}^m_+$ *jest rozwiązaniem problemu (4) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba* $\lambda^0 \geqslant 0$ *taka, że*

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{x}}(\overline{x}^0, \lambda^0) \leqslant \overline{0}, \quad \left\langle \frac{\partial L}{\partial \overline{x}}(\overline{x}^0, \lambda^0), \overline{x}^0 \right\rangle = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\overline{x}^0, \lambda^0) \geqslant 0, \quad \lambda^0 \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\overline{x}^0, \lambda^0) = 0. \tag{9}$$

Uwaga 1.25. Ponieważ

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{x}}(\overline{x}^0, \lambda^0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}^0) - \lambda^0 p_1, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(\overline{x}^0) - \lambda^0 p_m \right)$$

oraz

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\overline{x}^0, \lambda^0) = I - \langle \overline{p}, \overline{x}^0 \rangle,$$

warunek (8) można zapisać równoważnie

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^0) \leqslant \lambda^0 p_i \wedge \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^0) = \lambda^0 p_i \ \vee \ x_i^0 = 0 \right] \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

zaś warunek (9) można zapisać równoważnie

$$\langle \overline{p}, \overline{x}^0 \rangle \leqslant I \wedge [\langle \overline{p}, \overline{x}^0 \rangle = I \ \vee \ \lambda^0 = 0].$$

Uwaga 1.26. Jeśli $I > 0$, to ponieważ funkcja użyteczności u jest rosnąca otrzymujemy $\overline{x}^0 \gtrdot \overline{0}$, a zatem istnieje i takie, że $x_i^0 > 0$. Ponieważ $p_i > 0$, więc $0 < \frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^0) = \lambda^0 p_i$, a stąd $\lambda^0 > 0$. To implikuje automatycznie $\langle \overline{p}, \overline{x}^0 \rangle = I$.

Definicja. Mówimy, że koszyk towarów $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *leży na linii budżetowej*, jeśli $\langle \overline{p}, \overline{x} \rangle = I$.

Wniosek 1.27. *Koszyk optymalny* $\overline{x}^0 = \varphi(\overline{p}, I)$ *leży na linii budżetowej. Ponadto jeśli* $x_i > 0$, *to* $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^0) = \lambda^0 p_i$.

Uwaga 1.28. Liczbę $\lambda^0 = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^0)/p_i > 0$ można interpretować ekonomicznie jako stosunek krańcowej użyteczności i-tego nabywanego towaru do jego ceny.

Stosunek ten nie zależy od towaru. Zatem przy najlepszym wyborze koszyka użyteczność towarów jest proporcjonalna do ich cen.

Jeśli $x_i, x_j > 0$, wówczas

$$s_{ij}(\overline{x}^0) = \frac{\partial u(\overline{x}^0)}{\partial x_i} / \frac{\partial u(\overline{x}^0)}{\partial x_j} = \frac{\lambda^0 p_i}{\lambda^0 p_j} = \frac{p_i}{p_j},$$

a więc krańcowa stopa substytucji i-tego towaru przez j-ty towar w najlepszym koszyku jest równa stosunkowi cen tych towarów.

Załóżmy, że w najkorzystniejszym dla konsumenta koszyku znajdują się wszystkie towary, tzn. $x_i^0 > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Jeśli tak nie jest, to po prostu odrzucamy z naszych rozważań te towary, które nie są nabywane. Wówczas rozwiązanie problemu (4) jest równoważne rozwiązaniu następującego układu równań

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}) - \lambda p_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$I - \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle = 0,$$

przy czym szukana jest para $(\overline{x}, \lambda) \in \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+$. Innymi słowy, przy ustalonych $(\overline{p}, I) \in \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+$ chcemy rozwiązać równie postaci

$$\psi(\overline{x}, \lambda, \overline{p}, I) = \overline{0},$$

gdzie

$$\psi : \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},$$
$$\psi(\overline{x}, \lambda, \overline{p}, I) = \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) - \lambda \overline{p}, I - \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \right).$$

Niech

$$\psi_1 : \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m, \quad \psi_1(\overline{x}, \lambda, \overline{p}, I) = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) - \lambda \overline{p},$$

$$\psi_2 : \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \operatorname{Int} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(\overline{x}, \lambda, \overline{p}, I) = I - \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle.$$

Ponieważ u z założenia jest funkcją klasy C^2, funkcja ψ jest klasy C^1 oraz

$$\frac{\partial \psi}{(\partial \overline{x}, \partial \lambda)} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{x}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \overline{x}} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2} & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Pokażemy, że macierz ta jest nieosobliwa. Ponieważ $H = H(\overline{x}) = \frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2}$ jest ujemnie określona, więc jest nieosobliwa. Macierz $\begin{bmatrix} H & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, więc ewentualna macierz odwrotna jest również symetryczna, a zatem jest postaci

$$\begin{bmatrix} A & \overline{b}^T \\ \overline{b} & c \end{bmatrix},$$

gdzie A jest $m \times m$ macierzą, $\overline{b} \in \mathbb{R}^m$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} Id & \overline{0}^T \\ \overline{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \overline{b}^T \\ \overline{b} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HA - \overline{p}^T\overline{b} & H\overline{b}^T - \overline{p}^T c \\ -\overline{p}A & -\overline{p}\overline{b}^T \end{bmatrix}$$

otrzymujemy, że

$$\overline{b}^T = H^{-1}\overline{p}^T c, \;\; 1 = -\overline{p}\overline{b}^T = -\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T c \text{ oraz } A = H^{-1}\overline{p}^T\overline{b} + H^{-1}.$$

Stąd wynika, że

$$c = -(\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T)^{-1} > 0$$

oraz

$$\overline{b}^T = cH^{-1}\overline{p}^T \text{ oraz } A = cH^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + H^{-1}.$$

Teraz każdy może sprawdzić, że rzeczywiście

$$\begin{bmatrix} H & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = c \begin{bmatrix} H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + c^{-1}H^{-1} & H^{-1}\overline{p}^T \\ \overline{p}H^{-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Ustalmy $(\overline{p}^0, I^0) \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \times \operatorname{Int}\mathbb{R}_+$. Niech $(\overline{x}^0, \lambda^0) \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \times \operatorname{Int}\mathbb{R}_+$ będzie rozwiązaniem problemu (4) lub równoważnie $\psi(\overline{x}^0, \lambda^0, \overline{p}^0, I^0) = \overline{0}$. Wówczas z twierdzenia o funkcji uwikłanej w otoczeniu $(\overline{p}^0, I^0) \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \times \operatorname{Int}\mathbb{R}_+$ istnieją funkcje $\varphi(\overline{p}, I) \in \mathbb{R}^m_+$, $\varphi_0(\overline{p}, I) \in \mathbb{R}_+$ klasy C^1 takie, że jeśli

$$\overline{x} = \varphi(\overline{p}, I), \;\; \lambda = \varphi_0(\overline{p}, I),$$

to $\psi(\overline{x}, \lambda, \overline{p}, I) = \overline{0}$. Ponieważ zdefiniowana lokalnie funkcja φ pokrywa się w otoczeniu punktu $(\overline{p}^0, I^0) \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \times \operatorname{Int}\mathbb{R}_+$ ze zdefiniowaną wcześniej funkcją popytu $\varphi : \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \times \operatorname{Int}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m_+$, więc funkcja popytu jest klasy C^1.

Twierdzenie 1.29 (o braku iluzji pieniądza)**.** *Funkcja popytu jest jednorodna stopnia* 0*, tzn. dla dowolnych* $\overline{p} > \overline{0}$*,* $I > 0$ *oraz* $\theta > 0$ *mamy*

$$\varphi(\theta\overline{p}, \theta I) = \varphi(\overline{p}, I).$$

Dowód. Załóżmy, że para $(\overline{x}, \lambda)$ jest rozwiązaniem problemu znajdowania optymalnego koszyka dla pary $(\overline{p}, I)$. Zatem $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial \overline{x}} = \lambda\overline{p}$ oraz $I = \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle$. Stąd $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial \overline{x}} = \lambda/\theta(\theta\overline{p})$ oraz $\theta I = \langle \theta\overline{p}, \overline{x} \rangle$, a więc $(\overline{x}, \lambda/\theta)$ jest rozwiązaniem problemu optymalnego koszyka dla pary $(\theta\overline{p}, \theta I)$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 1.30. *Niech*

$$H = H(\overline{p}, I) = \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}(\varphi(\overline{p}, I)) \text{ oraz } \delta = \delta(\overline{p}, I) = -(\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T)^{-1} > 0.$$

Wówczas

$$\frac{\partial \varphi(\overline{p}, I)}{\partial \overline{p}} = \delta\varphi_0(\overline{p}, I)H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + \varphi_0(\overline{p}, I)H^{-1} + \delta H^{-1}\overline{p}^T\varphi(\overline{p}, I), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi(\overline{p}, I)}{\partial I} = -\delta H^{-1}\overline{p}^T, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi_0(\overline{p}, I)}{\partial \overline{p}} = \delta\varphi_0(\overline{p}, I)\overline{p}H^{-1} + \delta\varphi(\overline{p}, I), \; \frac{\partial \varphi_0(\overline{p}, I)}{\partial I} = -\delta,$$

Uwaga 1.31. Wzory (12) oraz (13) wyjaśniają w jaki sposób zmienia się popyt na towary przy zmieniających się cenach oraz zmieniającym się dochodzie konsumenta.

Dowód. Niech $\overline{\varphi}(\overline{p}, I) = (\varphi(\overline{p}, I), \varphi_0(\overline{p}, I)) = (\overline{x}, \lambda)$. Ponieważ

$$\psi(\overline{\varphi}(\overline{p}, I), \overline{p}, I) = \overline{0},$$

licząc pochodną względem zmiennych $(\overline{p}, I)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi}{\partial(\overline{x}, \lambda)}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial(\overline{p}, I)} + \frac{\partial \psi}{\partial(\overline{p}, I)} = \overline{0}. \tag{14}$$

Przypomnijmy, że z (10) mamy

$$\frac{\partial \psi}{\partial(\overline{x}, \lambda)} = \begin{bmatrix} H & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą odwracalną oraz

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{p}} = (-\lambda Id, -\overline{x})^T \text{ oraz } \frac{\partial \psi}{\partial I} = (\overline{0}, 1)^T,$$

gdzie $\overline{x} = \varphi(\overline{p}, I)$ oraz $\lambda = \varphi_0(\overline{p}, I)$. Zatem ze względu na (14) oraz (11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial(\overline{p}, I)} &= -\left(\frac{\partial \psi}{\partial(\overline{x}, \lambda)}\right)^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial(\overline{p}, I)} = -\begin{bmatrix} H & -\overline{p}^T \\ -\overline{p} & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\lambda Id & \overline{0}^T \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\delta \begin{bmatrix} H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + \delta^{-1}H^{-1} & H^{-1}\overline{p}^T \\ \overline{p}H^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\lambda Id & \overline{0}^T \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \delta \begin{bmatrix} \lambda H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + \lambda\delta^{-1}H^{-1} + H^{-1}\overline{p}^T\overline{x} & -H^{-1}\overline{p}^T \\ \lambda\overline{p}H^{-1} + \overline{x} & -1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

a stąd

$$\frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial\overline{p}} = \delta\lambda H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + \lambda H^{-1} + \delta H^{-1}\overline{p}^T\overline{x},\ \frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial I} = -\delta H^{-1}\overline{p}^T,$$

$$\frac{\partial\varphi_0(\overline{p},I)}{\partial\overline{p}} = \delta\lambda\overline{p}H^{-1} + \delta\overline{x},\ \ \frac{\partial\varphi_0(\overline{p},I)}{\partial I} = -\delta,$$

gdzie $\overline{x} = \varphi(\overline{p},I)$ oraz $\lambda = \varphi_0(\overline{p},I)$. □

Lemat 1.32. *Jeśli $m \times m$ macierz A jest symetryczna i ujemnie określona, to dla dowolnego niezerowego wektora $\overline{b} \in \mathbb{R}^m$ macierz $A^T\overline{b}^T\overline{b}A - (\overline{b}A\overline{b}^T)A$ jest niedodatnio określona. Ponadto, jeśli $\overline{0} \neq \overline{x} \in \mathbb{R}^m$ nie jest współliniowy z $\overline{b}$, to*

$$\overline{x}A^T\overline{b}^T\overline{b}A\overline{x}^T - (\overline{b}A\overline{b}^T)\overline{x}A\overline{x}^T < 0.$$

Dowód. Musimy pokazać, że dla dowolnego $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ mamy

$$\overline{x}A^T\overline{b}^T\overline{b}A\overline{x}^T - (\overline{b}A\overline{b}^T)\overline{x}A\overline{x}^T \leqslant 0.$$

Macierz A wyznacza iloczyn skalarny $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle_A = -\overline{x}A\overline{y}^T$. Zauważmy, że

$$\overline{x}A^T\overline{b}^T = (\overline{b}A\overline{x}^T)^T = \overline{b}A\overline{x}^T = -\langle\overline{b},\overline{x}\rangle_A.$$

Zatem z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\overline{x}A^T\overline{b}^T\overline{b}A\overline{x}^T = \langle\overline{b},\overline{x}\rangle_A^2 \leqslant \langle\overline{b},\overline{b}\rangle_A\langle\overline{x},\overline{x}\rangle_A = (\overline{b}A\overline{b}^T)\overline{x}A\overline{x}^T.$$

Druga część lematu wynika z fakty, że nierówność Cauchy'ego jest ostra dla niewspółliniowych wektorów. □

Twierdzenie 1.33. *Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant m$ mamy*

$$\frac{\partial\varphi_i(\overline{p},I)}{\partial p_i} + \frac{\partial\varphi_i(\overline{p},I)}{\partial I}\varphi_i(\overline{p},I) < 0.$$

Dowód. Rozważmy macierz

$$\frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial\overline{p}} + \frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial I}\varphi(\overline{p},I). \tag{15}$$

Ze względu na (12) oraz (13), kładąc $\lambda = \varphi_0(\overline{p},I)$ oraz $\overline{x} = \varphi(\overline{p},I)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial\overline{p}} + \frac{\partial\varphi(\overline{p},I)}{\partial I}\varphi(\overline{p},I)\\
&= \delta\lambda H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} + \lambda H^{-1} + \delta H^{-1}\overline{p}^T\overline{x} - \delta H^{-1}\overline{p}^T\overline{x}\\
&= \delta\lambda\left(H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} - (\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T)H^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Ponieważ macierz H^{-1} jest ujemnie określona, z lematu 1.32 otrzymujemy, że dla dowolnego wektora $\overline{e}$ niewspółliniowego z $\overline{p}$ mamy

$$\overline{e}\left(H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} - (\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T)H^{-1}\right)\overline{e}^T < 0.$$

Ponieważ wszystkie współczynniki wektora $\overline{p}$ są dodatnie, powyższa nierówność jest spełniona dla dowolnego wersora bazowego $\overline{e}_i$. Stąd elementy macierzy $H^{-1}\overline{p}^T\overline{p}H^{-1} - (\overline{p}H^{-1}\overline{p}^T)H^{-1}$ leżące na przekątnej są ujemne. Zatem elementy leżące na przekątnej macierzy (15) są również ujemne, a tymi elementami są właśnie

$$\frac{\partial\varphi_i(\overline{p},I)}{\partial p_i} + \frac{\partial\varphi_i(\overline{p},I)}{\partial I}\varphi_i(\overline{p},I), \quad i = 1,\ldots,m.$$

□

Definicja. Macierz

$$\varepsilon^c(\overline{p},I) = \left[\frac{\partial\varphi_i(\overline{p},I)}{\partial p_j}\frac{p_j}{\varphi_i(\overline{p},I)}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

nazywamy *macierzą współczynników elastyczności cenowej*. Współczynnik $\varepsilon^c_{ij}(\overline{p},I)$ wskazuje jak zachowuje się popyt na i-towar przy rosnącej cenie j-tego towaru. Liczbę

$$\varepsilon^d_j(\overline{p},I) = \frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial I}\frac{I}{\varphi_j(\overline{p},I)}$$

nazywamy *elastycznością dochodową popytu* na j-ty towar. Wskazuje ona w jaki sposób zachowuje się popyt na j-ty towar przy wzroście dochodów.

Uwaga 1.34. Intuicja mówi nam, że ze wzrostem ceny popyt na towar powinien maleć, tzn. *współczynnik elastyczności cenowej* $\varepsilon^c_{jj}(\overline{p},I)$ j-tego produktu powinien być ujemny. Jednak pod koniec XIX w. angielski ekonomista Robert Giffen (1837-1919) zaobserwował odwrotne zjawisko. Dla niektórych towarów, takich jak chleb, czy ziemniaki popyt rósł wraz z ich ceną. To zjawisko nazwano *paradoksem Giffena*, zaś towary, których ono dotyczy *towarami Giffena*, tzn. jeśli $\varepsilon^c_{jj}(\overline{p},I) > 0$, to j-ty towar nazywamy towarem Giffena. Jeśli $\varepsilon^c_{jj}(\overline{p},I) < 0$, to mówimy, że j-ty towar jest *normalny*.

Jako konkluzję z twierdzenia 1.33 otrzymujemy następujący rezultat.

Wniosek 1.35. *Jeśli j-ty towar jest towarem Giffena, to elastyczność dochodowa $\varepsilon^d_j(\overline{p},I)$ j-tego towaru jest ujemna. Zatem ze wzrostem dochodów maleje popyt na ten towar.*

Dowód. Ponieważ
$$\frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial p_j}+\frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial I}\varphi_j(\overline{p},I)<0,$$
$\varphi_j(\overline{p},I)>0$ oraz $\frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial p_j}>0$ (Giffen), więc $\frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial I}$ musi być liczbą ujemną, stąd
$$\varepsilon_j^d(\overline{p},I)=\frac{\partial\varphi_j(\overline{p},I)}{\partial I}\frac{I}{\varphi_j(\overline{p},I)}<0.$$
□

Powyższy wniosek wskazuje dobitnie na to, że towary Giffena są towarami zaspokajającymi najbardziej elementarne potrzeby życiowe, tzn. gdy przychodzi bieda popyt na nie wzrasta kosztem towarów normalnych, a w dobrobycie nie są już tak ważne.

W przypadku towarów normalnych elastyczność dochodowa może być zarówno ujemna, jak i dodatnia. Jeśli jest ona ujemna, czyli tak jak dla towarów Giffena popyt maleje ze wzrostem dochodu, mówimy o towarach *niższego rzędu*. Natomiast, gdy elastyczność dochodowa jest dodatnia, czyli popyt rośnie ze wzrostem dochodu, mówimy o towarach *wyższego rzędu*. Możemy traktować je jako towary luksusowe.

Przykład 8. Wyznaczmy funkcję popytu w przypadku, gdy na rynku są tylko dwa rodzaje towarów oraz funkcja użyteczności jest logarytmiczna
$$u(x_1,x_2)=a\ln x_1+b\ln x_2,\ \text{gdzie } a,b>0.$$
Musimy rozwiązać układ równań
$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)-\lambda p_1=\frac{a}{x_1}-\lambda p_1,\\ 0&=\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)-\lambda p_2=\frac{b}{x_2}-\lambda p_2,\\ I&=p_1x_1+p_2x_2.\end{aligned}$$
Z dwu pierwszych równań mamy $x_1=\frac{a}{\lambda p_1}$ oraz $x_2=\frac{b}{\lambda p_2}$. Wstawiając to co otrzymaliśmy do trzeciego równania mamy
$$I=p_1x_1+p_2x_2=p_1\frac{a}{\lambda p_1}+p_2\frac{b}{\lambda p_2}=\frac{a+b}{\lambda},$$
a więc $\lambda=\frac{a+b}{I}$ oraz $x_1=\frac{a}{\lambda p_1}=\frac{aI}{p_1(a+b)}$, $x_2=\frac{b}{\lambda p_2}=\frac{bI}{p_2(a+b)}$. Zatem
$$\varphi(p_1,p_2,I)=\left(\frac{aI}{p_1(a+b)},\frac{bI}{p_2(a+b)}\right)\ \text{oraz}\ \varphi_0(p_1,p_2,I)=\frac{a+b}{I}.$$
Wówczas $\frac{\partial\varphi_1}{\partial I}=\frac{a}{p_1(a+b)}>0$ oraz $\frac{\partial\varphi_2}{\partial I}=\frac{b}{p_2(a+b)}>0$, więc mamy tutaj do czynienia z towarami wyższego rzędu.

2 Teoria produkcji

2.1 Przestrzeń produkcyjna i funkcja produkcji

Do tej pory nie interesowało nas skąd towary znajdują się na rynku, czyli wyłączyliśmy producentów towarów z gry ekonomicznej. Obecnie zajmiemy się rynkiem towarów tylko z punktu widzenia producenta, który z towarów, zwanych czasem *środkami produkcji*, produkuje towary konsumpcyjne. Zwykle w ekonomii nie dokonuje się rozróżnienia pomiędzy środkami produkcji a towarami konsumpcyjnymi ponieważ towar konsumpcyjny może być środkiem produkcji dla innego podmiotu gospodarczego.

Przez proces produkcyjny potocznie rozumiemy proces przetwarzania jednych towarów (środki produkcji) w inne towary (konsumpcyjne), przy zastosowaniu pewnych procesów technologicznych, które wiążą się też z pewnymi nakładami (np. na płace). Te dodatkowe nakłady będziemy włączać do środków produkcji i traktować równorzędnie z „twardymi" towarami produkcyjnymi. Sam proces technologiczny z punktu widzenia ekonomii matematycznej nie jest istotny, interesuje nas tylko ile towaru weszło i ile wyszło w procesie produkcji.

Załóżmy, że w gospodarce mamy m towarów. Wówczas działalność produkcyjną możemy scharakteryzować za pomocą wektora

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m.$$

Wówczas wektor $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ interpretujemy jako *wektor nakładów*, zaś $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ interpretujemy jako *wektor wyników (produkcji)*. Wektor $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m$ nazywamy *procesem produkcyjnym*. Innymi słowy, w procesie produkcyjnym $(\overline{x}, \overline{y})$ zużyto $x_i \geqslant 0$ i-tego towaru dla $i = 1, \ldots, m$, aby wyprodukować $y_j \geqslant 0$ j-tego towaru dla $j = 1, \ldots, m$.

Oczywiście dla danego producenta nie wszystkie procesy produkcyjne są osiągalne, ze względu na ograniczenia technologiczne (szewc nie będzie piekł chleba). Dlatego z każdym producentem stowarzysza się zbiór dopuszczalnych procesów produkcyjnych, który oznaczmy przez $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m$. Zbiór ten nazywamy *przestrzenią produkcyjną*.

Podamy teraz listę naturalnych założeń, które będą dotyczyć przestrzeni produkcyjnej.

(Z1) Proporcjonalność nakładów i wyników. Dla dowolnego $\alpha \geqslant 0$ mamy $\alpha\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$. Założenie to oznacza, że proporcjonalna zmiana nakładów (z $\overline{x}$ na $\alpha\overline{x}$) daje proporcjonalną zmianę wyników.

Czasem zamiast warunku (Z1) rozważa się inne alternatywne warunki, w zależności od charakterystyki producenta.

(Z1') Założenie malejących przychodów. Dla każdego $0 \leqslant \alpha < 1$ mamy $\alpha\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$ oraz istnieje $\alpha' > 1$ taki, że $\alpha'\mathcal{Z} \not\subseteq \mathcal{Z}$.

(Z1") Założenie rosnących przychodów. Dla każdego $\alpha > 1$ mamy $\alpha\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$ oraz istnieje $0 \leqslant \alpha' < 1$ taki, że $\alpha'\mathcal{Z} \not\subseteq \mathcal{Z}$.

(Z2) Addytywność procesów produkcyjnych.

$$(\overline{x}_1, \overline{y}_1) \in \mathcal{Z} \wedge (\overline{x}_2, \overline{y}_2) \in \mathcal{Z} \Longrightarrow (\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y}_1 + \overline{y}_2) \in \mathcal{Z},$$

tzn. dodawanie nakładów powoduje dodanie się wyników produkcji.

(Z3) Brak „rogu obfitości".

$$(\overline{0}, \overline{y}) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \overline{y} = \overline{0},$$

tzn. brak nakładów powoduje brak wyników.

(Z4) Możliwość marnotrawstwa (wariant I).

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z} \wedge \overline{0} \leqslant \overline{y}' \leqslant \overline{y} \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}') \in \mathcal{Z},$$

tzn. jeśli możliwe jest wyprodukowanie wektora towarów $\overline{y}$, to możliwe jest każdego gorszego wektora towarów.

(Z5) Możliwość marnotrawstwa (wariant II).

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z} \wedge \overline{x}' \geqslant \overline{x} \Rightarrow (\overline{x}', \overline{y}) \in \mathcal{Z},$$

tzn. jeśli wektor nakładów $\overline{x}$ wystarczy do wyprodukowania wektora produktów $\overline{y}$, to każde większe nakłady również wystarczą.

(Z6) Domkniętość przestrzeni produkcyjnej. Zbiór $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$ jest domknięty, tzn. jeśli dowolnie blisko wektora $(\overline{x}, \overline{y})$ znajdziemy proces dopuszczalny, to $(\overline{x}, \overline{y})$ jest też procesem produkcyjnym dopuszczalnym.

(Z7) Nieodwracalność procesów produkcyjnych.

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z} \wedge (\overline{x} \neq \overline{y}) \Rightarrow (\overline{y}, \overline{x}) \notin \mathcal{Z},$$

tzn. niemożliwe jest odtworzenie wektora nakładów z wektora wyników.

Definicja. Jeśli $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z}$, to wektor $\overline{q} = \overline{y} - \overline{x}$ nazywamy *wektorem czystej produkcji*, natomiast zbiór

$$\{\overline{q} = \overline{y} - \overline{x} : (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z}\}$$

nazywamy *przestrzenią c-produkcyjną*. Gdy $q_i > 0$ oznacza to dodatnią produkcję i-tego towaru, $q_i < 0$ oznacza zużycie w produkcji i-tego towaru.

Definicja. Mówimy, że proces produkcyjny $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z}$ jest *technologicznie efektywny*, gdy

$$\overline{y}' > \overline{y} \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}') \notin \mathcal{Z}.$$

Definicja. Jeśli istnieje funkcja $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ taka, że

$$\overline{y} = f(\overline{x}) \Longleftrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z} \text{ technologicznie efektywny,}$$

to funkcję $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ nazywamy *funkcją produkcji* dla przestrzeni produkcyjnej $\mathcal{Z}$.

Załóżmy dla prostoty, że producent wytwarza tylko jeden towar zużywając m różnych rodzajów środków produkcji. Wówczas funkcja produkcji ma postać $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$. Zwykle będziemy zakładać, że funkcja produkcji $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$ jest klasy C^2 oraz spełnia następujące warunki

(F1) $f(\overline{0}) = 0$;

(F2) $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $\overline{x} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m$;

(F3) hesjan $H(\overline{x}) = \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2}$ jest niedodatnio określony dla $\overline{x} \in \mathbb{R}_+^m$;

(F4) $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$ dla wszystkich $\alpha \geqslant 0$ oraz $\overline{x} \in \mathbb{R}_+^m$ (f jest jednorodna stopnia 1).

Lemat 2.1. *Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunki (F1)-(F4), to jest ona nadaddytywna, tzn.*

$$f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \geqslant f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) \ \text{dla} \ \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}_+^m.$$

Dowód. Z warunku (F3) funkcja f jest wklęsła, więc z jednorodności mamy

$$\frac{1}{2} f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = f\left(\frac{1}{2}\overline{x}_1 + \frac{1}{2}\overline{x}_2\right) \geqslant \frac{1}{2} f(\overline{x}_1) + \frac{1}{2} f(\overline{x}_2).$$

□

Twierdzenie 2.2. *Niech $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ będzie funkcją klasy C^2, taką, że każda jej funkcja współrzędna $f_j : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant j \leqslant m$ spełnia warunki (F1)-(F4). Wówczas zbiór*

$$\mathcal{Z} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m : \overline{0} \leqslant \overline{y} \leqslant f(\overline{x})\}$$

spełnia własności (Z1)-(Z6) oraz f jest funkcją produkcji dla $\mathcal{Z}$.

Dowód. **(Z1).** Jeśli $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{Z}$, to $\overline{y} \leqslant f(\overline{x})$, a więc dla dowolnego $\alpha \geqslant 0$, z jednorodności f, mamy

$$\alpha\overline{y} \leqslant \alpha f(\overline{x}) = f(\alpha\overline{x}).$$

Stąd $\alpha(\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{Z}$.

(Z2). Jeśli $(\overline{x}_1,\overline{y}_1) \in \mathcal{Z}$ oraz $(\overline{x}_2,\overline{y}_2) \in \mathcal{Z}$, to $\overline{y}_1 \leqslant f(\overline{x}_1)$ oraz $\overline{y}_2 \leqslant f(\overline{x}_2)$. Zatem z lematu 2.1 otrzymujemy

$$\overline{y}_1 + \overline{y}_2 \leqslant f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) \leqslant f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2),$$

a stąd $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y}_1 + \overline{y}_2) \in \mathcal{Z}$.

(Z3). Jeśli $(\overline{0},\overline{y}) \in \mathcal{Z}$, to $\overline{0} \leqslant \overline{y} \leqslant f(\overline{0}) = \overline{0}$, a więc $\overline{y} = \overline{0}$.

(Z4). Jeśli $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{Z}$ oraz $\overline{0} \leqslant \overline{y}' \leqslant \overline{y}$, to

$$\overline{y}' \leqslant \overline{y} \leqslant f(\overline{x}),$$

więc $(\overline{x},\overline{y}') \in \mathcal{Z}$.

(Z5). Załóżmy, że $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{Z}$ oraz $\overline{x} \leqslant \overline{x}'$. Z założenia (F2) funkcja f jest rosnąca, więc

$$\overline{y} \leqslant f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{x}'),$$

a stąd $(\overline{x}',\overline{y}) \in \mathcal{Z}$.

(Z6). Domkniętość zbioru $\mathcal{Z}$ wynika łatwo z ciągłości f. □

Wróćmy do sytuacji, gdy producent produkuje tylko jeden towar.

Definicja. Pochodną cząstkową $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}$ nazywamy *krańcową wydajnością i-tego środka produkcji* w wektorze nakładów $\overline{x}$. Wielkość ta wskazuje o ile wzrośnie produkcja jeśli zwiększymy nakład i-tego czynnika produkcji o jedną jednostkę. Natomiast

$$\varepsilon_i^f(\overline{x}) = \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}\frac{x_i}{f(\overline{x})} > 0$$

nazywamy *elastycznością produkcji względem i-tego czynnika produkcji.* Wskazuje ona o ile procent wzrośnie produkcja, gdy nakład i-tego czynnika produkcji zwiększymy o 1%.

Ustalmy wielkość produkcji na poziomie $y_0 > 0$ oraz rozważmy wszystkie możliwe wektory nakładu, które realizują ten poziom produkcji, tzn.

$$G = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m_+ : f(\overline{x}) = y_0\},$$

zbiór ten nazywany jest *izokwantą funkcji produkcji.* Niech $\overline{x}^0 \in G$. Ponieważ $\frac{\partial f(\overline{x}^0)}{\partial x_j} > 0$, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieje funkcja G_j klasy C^2 zależąca od $x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m$ taka, że przy ustalonych $x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m$ mamy

$$\overline{x} = (x_1,\ldots,x_{j-1},G_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m),x_{j+1},\ldots,x_m) \in G.$$

Ponieważ

$$f(x_1,\ldots,x_{j-1},G_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m),x_{j+1},\ldots,x_m)=y_0,$$

więc różniczkując powyższe wyrażenie po x_i $(i\neq j)$ otrzymamy

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}+\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_j}\frac{\partial G_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m)}{\partial x_i}=0.$$

Definicja. Pochodną cząstkową

$$\sigma^f_{ij}(\overline{x}):=-\frac{\partial G_j}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m)=\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_j}$$

nazywamy *krańcową stopą substytucji* i-tego towaru przez j-ty towar w wektorze nakładów $\overline{x}$. Natomiast

$$\begin{aligned}\epsilon^f_{ij}(\overline{x}) &= -\frac{\partial G_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m)}{\partial x_i}\frac{x_i}{G_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m)}\\ &= \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_j}\frac{x_i}{x_j}\end{aligned}$$

nazywamy *elastycznością substytucji* i-tego towaru przez j-ty w wektorze nakładów $\overline{x}$.

Uwaga 2.3. Krańcową stopą substytucji $\sigma^f_{ij}(\overline{x})>0$ wskazuje jaką ilością j-tego towaru należy zrekompensować jednostkowy spadek ilości i-tego towaru tak, aby nie zmienić poziomu produkcji. Elastycznością substytucji $\epsilon^f_{ij}(\overline{x})$ wskazuje podobną rekompensatę ale w terminach procentowych.

2.2 Funkcja produkcji Cobba-Douglasa

Załóżmy, że proces produkcyjny zależy tylko od kapitału $k>0$ wniesionego przez producenta w procesie produkcji oraz ilości pracy $z>0$ mierzonej np. w roboczogodzinach.

Wówczas iloraz $u=k/z$ nazywamy *technicznym uzbrojeniem pracy*. Załóżmy, że krańcowa stopa substytucji σ^f_{zk} pracy przez kapitał jest proporcjonalna do stosunku kapitału do ilości pracy (technicznego uzbrojenia pracy), tzn. istnieje liczba $\alpha>0$ taka, że

$$\frac{\partial f}{\partial z}(k,z)\Big/\frac{\partial f}{\partial k}(k,z)=\sigma^f_{zk}(k,z)=\alpha\frac{k}{z}. \tag{16}$$

Inaczej mówiąc elastyczność substytucji pracy przez kapitał jest stała

$$\epsilon^f_{zk}(k,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(k,z)\Big/\frac{\partial f}{\partial k}(k,z)\frac{z}{k}=\alpha.$$

Załóżmy ponadto, że funkcja produkcji spełnia warunki (F1)-(F4).

Z jednorodności funkcji f mamy

$$f(k,z) = zf(k/z,1) = zf(u,1).$$

Niech $F(u) = f(u,1)$. Wówczas

$$\frac{\partial f(k,z)}{\partial k} = zF'(u)\frac{1}{z} = F'(u)$$

oraz

$$\frac{\partial f(k,z)}{\partial z} = F(u) - zF'(u)\frac{k}{z^2} = F(u) - uF'(u).$$

Z (16) otrzymujemy więc

$$\frac{F(u) - uF'(u)}{F'(u)} = \alpha u \Longleftrightarrow \frac{dF}{du} = \frac{F}{(1+\alpha)u}.$$

Zatem musimy rozwiązać równanie różniczkowe rozdzielonych zmiennych, a więc

$$\ln|F| = \int \frac{dF}{F} = \int \frac{du}{(1+\alpha)u} = \frac{\ln|u|}{1+\alpha} + C.$$

stąd

$$\ln F(u) - \ln F(1) = \frac{\ln|u|}{1+\alpha} \Longrightarrow F(u) = F(1)u^{\varepsilon},\ \text{gdzie } \varepsilon = 1/(1+\alpha).$$

Korzystając jeszcze raz z jednorodności otrzymujemy

$$f(k,z) = zf(u,1) = zf(1,1)u^{\varepsilon} = f(1,1)k^{\varepsilon}z^{1-\varepsilon}.$$

Funkcję produkcji postaci $f(k,z) = ak^{\varepsilon}z^{1-\varepsilon}$, gdzie $a > 0$ oraz $0 < \varepsilon < 1$ nazywamy funkcją *Cobba-Douglasa.*

Łatwo sprawdzić, że funkcje Cobba-Douglasa faktycznie spełniają własności (F1)-(F4). Ponadto, stałe ε oraz $1-\varepsilon$ mają swoje interpretacje ekonomiczne, są to elastyczności produkcji odpowiednio względem kapitału i ilości pracy, istotnie

$$E_k f(k,z) = \frac{\partial f(k,z)}{\partial k}\frac{k}{f(k,z)} = a\varepsilon k^{\varepsilon-1}z^{1-\varepsilon}\frac{k}{ak^{\varepsilon}z^{1-\varepsilon}} = \varepsilon,$$

$$E_z f(k,z) = \frac{\partial f(k,z)}{\partial z}\frac{z}{f(k,z)} = a(1-\varepsilon)k^{\varepsilon}z^{-\varepsilon}\frac{z}{ak^{\varepsilon}z^{1-\varepsilon}} = 1-\varepsilon.$$

Uwaga 2.4. Jeśli założymy, że

$$\sigma_{zk}^{f} = \alpha u^{\sigma}, \text{ gdzie } 0 < \sigma \neq 1,$$

to można pokazać (podobnie jak powyżej), że

$$f(k,z) = [ak^{-\gamma} + bz^{-\gamma}]^{-1/\gamma}, \text{ gdzie } \gamma = \sigma - 1 \text{ oraz } a, b > 0.$$

Funkcje tego typu nazywa się funkcjami *CES*, jest to skrót od angielskiej nazwy *constant elasticity of substitution.*

2.3 Producent w warunkach doskonałej konkurencji

Podstawowym celem producenta jest maksymalizowanie dochodów. Będziemy zakładać, że producent produkuje jeden towar zużywając m różnych środków produkcji. Załóżmy, że jego przestrzeń produkcyjna wyznaczona jest przez funkcję produkcji $f : \mathbb{R}_{+}^{m} \to \mathbb{R}_{+}$.

Zastanowimy się nad tzw. strategią długookresową producenta. Przy podejściu długookresowym producent ma możliwość wyboru dowolnego wektora nakładów tzn. dostępna jest dowolna ilość każdego czynnika produkcji. Załóżmy, że wektor $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_m) > \overline{0}$ opisuje ceny zakupu środków produkcji, zaś $p > 0$ jest ceną, którą producent uzyska za jedną jednostkę wyprodukowanego towaru. Wówczas przy nakładach reprezentowanych przez wektor $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_{+}^{m}$, koszty produkcji wynoszą $\langle \overline{v}, \overline{x} \rangle$, zaś przychód wynosi $pf(\overline{x})$. Stąd dochód producenta wynosi

$$pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x} \rangle.$$

Zatem zadaniem, które musi rozwiązać producent jest:

$$\text{znaleźć maksimum } pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x} \rangle \text{ przy ograniczeniu } \overline{x} \geqslant \overline{0}. \tag{17}$$

Zauważmy, że jeśli f jest jednorodna stopnia 1, ten problem nie ma rozwiązania. Istotnie, ponieważ

$$pf(\theta\overline{x}) - \langle \overline{v}, \theta\overline{x} \rangle = \theta(pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x} \rangle) \text{ dla dowolnego } \theta \geqslant 0,$$

więc jeśli znajdziemy nakłady $\overline{x}$, które dają zysk, tzn. $pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x} \rangle > 0$, to

$$\lim_{\theta \to +\infty} pf(\theta\overline{x}) - \langle \overline{v}, \theta\overline{x} \rangle = +\infty.$$

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że funkcja produkcji f spełnia własności (F1), (F2) oraz jest silnie wklęsła. Ponadto załóżmy, że ceny $\overline{v}$ i p spełniają warunek*

$$p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{0}) > \overline{v} > \lim_{\overline{x}\to\infty} p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x}). \tag{18}$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\overline{0} \neq \overline{x} \in \mathbb{R}^m_+$ problemu (17). Ponadto, warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie rozwiązania $\overline{x} > \overline{0}$ problemu (17) jest spełnianie równania

$$p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) = \overline{v}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$g : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}, \quad g(\overline{x}) = pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x}\rangle.$$

Ponieważ $\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) = p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) - \overline{v}$, z założenia mamy

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{0}) > \overline{0} > \lim_{\overline{x}\to\infty} \frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{x}).$$

Zatem istnieje $r > 0$ taki, że jeśli $\|\overline{x}\| \geqslant r$ to $\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) < \overline{0}$. Stąd funkcja g na zbiorze $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^m_+ : \|\overline{x}\| \geqslant r\}$ jest malejąca. Z drugiej strony funkcja g na zbiorze $K_r = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m_+ : \|\overline{x}\| \leqslant r\}$, jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym, przyjmuje wartość największą w pewnym punkcie $\overline{x}_0 \in K_r$. Ponadto, dla dowolnego $\overline{x}$ takiego, że $\|\overline{x}\| > r$ mamy $\overline{x} > r\overline{x}/\|\overline{x}\| \in K_r$, a stąd

$$g(\overline{x}) < g(r\overline{x}/\|\overline{x}\|) \leqslant \max_{K_r} g = g(\overline{x}_0).$$

Zatem funkcja $g : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość największą w punkcie $\overline{x}_0$. Ponieważ $\frac{\partial^2 g}{\partial \overline{x}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{x}^2}$, więc funkcja g jest silnie wklęsła, a co za tym idzie przyjmuje wartość największą w co najwyżej jednym punkcie. Ponieważ $\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{0}) > \overline{0}$, więc w otoczeniu $\overline{0}$ funkcja g jest rosnąca, co oznacza, że nie może przyjmować wartości największej w punkcie $\overline{0}$.

Ponadto, z silnej wklęsłości $g : \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ warunkiem równoważnym realizacji wartości największej w punkcie $\overline{x} \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^m_+$ jest

$$p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) - \overline{v} = \frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) = \overline{0},$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Rozważmy funkcję $\psi : \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ klasy C^1 daną wzorem

$$\psi(\overline{x}, p, \overline{v}) = p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x}) - \overline{v}.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia warunkiem równoważnym istnienia dodatniego rozwiązania problemu (17) jest istnienie rozwiązania równania

$$\psi(\overline{x}, p, \overline{v}) = \overline{0},$$

gdzie danymi są p oraz $\overline{v}$. Zauważmy, że

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{x}}(\overline{x}, p, \overline{v}) = p\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{x}^2}(\overline{x}),$$

a z założenia jest to macierz ujemnie określona, więc nieosobliwa dla $p > 0$. Zatem na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej w otoczeniu dowolnego punktu $(p_0, \overline{v}_0)$, dla którego problem (17) ma dodatnie rozwiązanie istnieje funkcja ξ klasy C^1 takie, że

$$\overline{x} = \xi(p, \overline{v})$$

jest dodatnim rozwiązaniem (17). W istocie dziedzinę funkcji ξ możemy rozszerzyć do zbioru wszystkich par $(p, \overline{v})$ spełniających warunek (18).

Definicja. Funkcję ξ nazywamy *funkcją produkcyjnego popytu na czynniki produkcji.* Funkcja ξ wskazuje jaki jest popyt producenta na środki produkcji przy ustalonych cenach towarów zużywanych $\overline{v}$ oraz cenie produkowanego towaru p.

Definicja. Funkcję

$$\eta(p, \overline{v}) = f(\xi(p, \overline{v}))$$

nazywamy *funkcją podaży towaru.* Wskazuje ona optymalny poziom produkcji przy ustalonych cenach towarów zużywanych $\overline{v}$ oraz cenie produkowanego towaru p.

Zajmiemy się teraz problemem reakcji producenta na zmiany cen na rynku. Z definicji funkcji popytu ξ oraz funkcji podaży η

$$p\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\xi(p, \overline{v})) = \overline{v} \text{ oraz } \eta(p, \overline{v}) = f(\xi(p, \overline{v})).$$

Różniczkując obie równości względem p oraz $\overline{v}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial f^T}{\partial \overline{x}} + pH(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial p} = \overline{0}^T,\ \frac{\partial \eta}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p},$$

$$pH(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial \overline{v}} = Id,\ \frac{\partial \eta}{\partial \overline{v}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \overline{v}},$$

gdzie $H(\overline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{x}^2}(\overline{x})$. Pochodne cząstkowe $\frac{\partial \eta}{\partial p}$ oraz $\frac{\partial \eta}{\partial v_i}$ opisują zmiany podaży przy jednostkowych zmianach cen odpowiednio towaru produkowanego p oraz i-tego czynnika produkcji v_i. Natomiast wektory $\frac{\partial \xi}{\partial p}$ oraz $\frac{\partial \xi}{\partial v_i}$ opisują zmiany popytu na towary produkcyjne przy jednostkowych zmianach cen odpowiednio towaru produkowanego p oraz i-tego czynnika produkcji v_i. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jest krańcową wydajnością produkcji dla i-tego środka produkcji. Ponieważ macierz H jest odwracalna mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial p} &= -p^{-1} H(\xi)^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \overline{x}}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial p} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = -p^{-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} H(\xi)^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \overline{x}}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial \overline{v}} &= p^{-1} H(\xi)^{-1}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial \overline{v}} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \overline{v}} = p^{-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} H(\xi)^{-1}.
\end{aligned}$$

Z powyższych wzorów możemy wysnuć pewne ogólne wnioski. Po pierwsze z ujemnej określoności H^{-1} otrzymujemy

$$\frac{\partial \eta}{\partial p} > 0,$$

czyli podaż produktu rośnie ze wzrostem jego ceny. Ponadto

$$\frac{\partial \eta}{\partial \overline{v}} = -\frac{\partial \xi^T}{\partial p} \Longrightarrow \frac{\partial \eta}{\partial v_i} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial p},$$

czyli wzrost ceny produkowanego towaru powoduje wzrost (spadek) popytu na i-ty środek produkcji wtedy i tylko wtedy, gdy zwiększenie ceny i-tego środka produkcji powoduje obniżenie (wzrost) produkcji.

Ponieważ macierz H^{-1} jest symetryczna, więc macierz $\partial \xi / \partial \overline{v}$ też jest symetryczna, a zatem

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial v_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial v_j},$$

czyli wpływ zmiany ceny i-tego środka produkcji na popyt na j-ty środek produkcji jest taki sam jak wpływ zmiany ceny j-tego środka produkcji na popyt na i-ty środek produkcji.

Z założenia wszystkie współczynniki wektora $\partial f / \partial \overline{x}$ są dodatnie. Ponadto,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} > 0,$$

więc istnieje $1 \leqslant i \leqslant m$ taka, że

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial v_i} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial p} < 0.$$

Zatem wzrost ceny produkowanego towaru spowoduje wzrost popytu na niektóre środki produkcji oraz, że istnieją takie środki produkcji, których wzrost cen spowoduje spadek produkcji.

Uwaga 2.6. Przy podejściu krótkoterminowym do planowania produkcji musimy uwzględnić ograniczenia w dostępie do środków produkcji, które nie występowały w podejściu długoterminowym. Wówczas problem planowania produkcji sprowadza się do rozwiązania problemu

$$\text{znaleźć maksimum } pf(\overline{x}) - \langle \overline{v}, \overline{x} \rangle \text{ pod warunkiem } h(\overline{x}) = \overline{0},\ \overline{x} \geqslant \overline{0}, \tag{19}$$

gdzie $h : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją klasy C^2, która wyznacza ograniczenia w nakładach. Do rozwiązania tego zadania stosuje się metodę mnożników Lagrange'a, w stylu twierdzenia Kuhna-Tuckera.

Aby przekonać się o różnicach pomiędzy podejściem długo i krótkookresowym prześledźmy konkretny przykład

Przykład 9 (Podejście długookresowe)*.* Niech $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$. Zatem szukamy maksimum

$$g(x_1, x_2) = p x_1^{1/4} x_2^{1/4} - v_1 x_1 - v_2 x_2 \text{ dla } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Szukamy więc rozwiązania układu równań

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = p\frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} - v_1,$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = p\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4} - v_2.$$

Stąd

$$x_1^{-3/4} x_2^{1/4} = \frac{4v_1}{p}, \quad x_1^{1/4} x_2^{-3/4} = \frac{4v_2}{p}.$$

Dzieląc równania stronami otrzymujemy $x_2/x_1 = v_1/v_2$ i korzystając z tego mamy

$$x_1^{-1/2} = x_1^{-3/4} x_1^{1/4} = \frac{4v_1}{p} \frac{v_2^{1/4}}{v_1^{1/4}} = \frac{4 v_1^{3/4} v_2^{1/4}}{p},$$

$$x_2^{-1/2} = x_2^{-3/4} x_2^{1/4} = \frac{4v_2}{p} \frac{v_1^{1/4}}{v_2^{1/4}} = \frac{4 v_2^{3/4} v_1^{1/4}}{p},$$

czyli

$$\xi_1(p, v_1, v_2) = x_1 = \frac{p^2}{16 v_1^{3/2} v_2^{1/2}}, \quad \xi_2(p, v_1, v_2) = x_2 = \frac{p^2}{16 v_1^{1/2} v_2^{3/2}}.$$

Stąd

$$\eta(p, v_1, v_2) = f(\xi_1(p, v_1, v_2)) = \frac{p}{4 v_1^{1/2} v_2^{1/2}}.$$

Przykład 10 (Podejście krótkookresowe). Załóżmy, że ograniczenia dostaw dotyczą pierwszego środka produkcji, a dokładniej, nie można zmienić jego dostaw, czyli $x_1 = \widetilde{x}_1$. Aby rozwiązać problem (19) szukamy maksimum

$$g(x_1, x_2) = p x_1^{1/4} x_2^{1/4} - v_1 x_1 - v_2 x_2 \text{ gdzie } x_1 = \widetilde{x}_1 \text{ oraz } x_2 \geqslant 0,$$

co sprowadza się do znalezienia maksimum funkcji jednej zmiennej

$$g(x_2) = p \widetilde{x}_1^{1/4} x_2^{1/4} - v_1 \widetilde{x}_1 - v_2 x_2.$$

Wystarczy zatem rozwiązać równanie

$$0 = g'(x_2) = \frac{1}{4} p \widetilde{x}_1^{1/4} x_2^{-3/4} - v_2.$$

Rozwiązanie jest zatem postaci

$$x_2 = \frac{\widetilde{x}_1^{1/3} p^{4/3}}{4^{4/3} v_2^{4/3}},$$

stąd

$$\xi_1(p, v_1, v_2) = \widetilde{x}_1, \quad \xi_2(p, v_1, v_2) = \frac{\widetilde{x}_1^{1/3} p^{4/3}}{4^{4/3} v_2^{4/3}}.$$

oraz

$$\eta(p, v_1, v_2) = f(\xi_1(p, v_1, v_2)) = \left(\frac{\widetilde{x}_1}{4} \frac{p}{v_2} \right)^{1/3}.$$

3 Modele równowagi rynkowej

Do tej pory rozpatrywaliśmy problemy ekonomiczne z punktu widzenia pojedynczego uczestnika rynku konsumenta lub producenta. Obecnie będziemy zajmować się problemami całego rynku towarowego, na którym następuje wymiana dóbr. W trakcie takiej wymiany każdy producent stara się maksymalizować dochody, natomiast każdy konsument chce zmaksymalizować zadowolenie z nabytych towarów. Głównym problemem następnej części wykładu jest problem istnienia cen towarów, przy których uczestnicy gry rynkowej maksymalizują zyski i zadowolenie oraz popyt na towary jest równy podaży.

3.1 Model rynku Arrowa-Hurwicza

Zaczniemy od modelu zaproponowanego przez K. Arrowa (ekonomista amerykański, 1921 - , Nagroda Nobla 1972) oraz L. Hurwicza (ekonomista polskiego pochodzenia, 1917-2008, Nagroda Nobla 2007), która opisuje zachowanie się na rynku grupy tzw. *handlowców* (producenci i konsumenci w jednej osobie), którzy oferują na rynku towarowym swoje koszyki towrów. Pomiędzy handlowcami następuje wymiana towarowa, przy czym zakładamy, że handlowcy nie posiadają innych środków finansowych poza tymi, które uzyskują ze sprzedaży koszyka towarów.

Załóżmy, że na rynku przebywa k handlowców, którzy handlują m rodzajami towarów. Przez $\overline{y}^j = (y_1^j, \ldots, y_m^j) \in \mathbb{R}_+^m$ będziemy oznaczać koszyk dostarczany na rynek przez j-tego handlowca, zaś przez $\overline{x}^j = (x_1^j, \ldots, x_m^j) \in \mathbb{R}_+^m$ będziemy oznaczać koszyk, który jest on gotowy nabyć. Będziemy zakładać, że przestrzenią towarów j-tego handlowca jest $\mathcal{X}^j = \mathbb{R}_+^m$. Przez $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m) > \overline{0}$ będziemy oznaczać wektor cen towarów znajdujących się na rynku. Jak już wspomnieliśmy handlowcy nie posiadają innych środków finansowych poza tymi, które uzyskują ze sprzedaży koszyka towarów, co oznacza, że

$$\langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle = \langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle \text{ dla każdego } j = 1, \ldots, m.$$

Przy wyborze kupna koszyka $\overline{x}^j$ j-ty handlowiec kieruje się indywidualnymi preferencjami, które są wyrażone za pomocą jego funkcji użyteczności $u^j : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$, która jest ciągła, silnie wklęsła i rosnąca. Z twierdzenia 1.21, istnieje koszyk

$$\overline{x}^j = \varphi^j(p, I^j) \text{ taki, że } u^j(\overline{x}^j) \geqslant u^j(\overline{x}) \text{ dla } \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle = I^j = \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle.$$

Ponadto, funkcja popytu $\varphi^j : \operatorname{Int} \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^m$ jest ciągła (patrz twierdzenie 1.22). Załóżmy dodatkowo, że funkcję φ^j możemy rozszerzyć w sposób ciągły na zbiór $\mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\}$. Ponieważ dochód j-tego handlowca zależy w istocie tylko od wektora cen $\overline{p}$, więc popyt handlowca też zależy tylko od tej zmiennej. Rozważmy więc funkcję popytu $f^j : \mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}_+^m$ postaci

$$f^j(\overline{p}) = \varphi^j(p, I^j) = \varphi^j(p, \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle).$$

Wektor $f^j(\overline{p})$ jest najkorzystniejszym wyborem koszyka dla j-tego handlowca przy poziomie cen $\overline{p}$. Jako złożenie funkcji ciągłych, f^j jest ciągła.

Definicja. Wektor $\sum_{j=1}^{j} f^j(\overline{p})$ nazywamy *wektorem popytu na towary*, zaś $\sum_{j=1}^{k} \overline{y}^j$ *wektorem podaży.* Różnicę

$$z(\overline{p}) = \sum_{j=1}^{j} f^j(\overline{p}) - \sum_{j=1}^{k} \overline{y}^j$$

nazywamy *wektorem nadmiernego popytu na towary.*

Ponieważ funkcje f^j są ciągłe, więc funkcja $z : \mathbb{R}^m_+ \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}^m_+$ jest ciągła. Będziemy również zakładać, że spełnia ona warunek

$$p_i = 0 \Longrightarrow z_i(\overline{p}) > 0 \text{ dla dowolnego } 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{20}$$

czyli, że popyt na darmowy towar jest wyższy od podaży.

Definicja. Mówimy, że rynek jest w *równowadze*, gdy $z(\overline{p}) = \overline{0}$, wówczas $\overline{p}$ nazywamy *wektorem cen równowagi.*

Jeśli $\overline{p}$ jest wektorem cen równowagi, to na rynku jeśli wszyscy handlowcy zachowują się zgodnie z rozsądkiem (próbując zmaksymalizować użyteczność nabytych towarów), to jest możliwość wymiany towarowej pomiędzy handlowcami tak, aby wszyscy byli najbardziej zadowoleni oraz popyt na towar był zaspokojony przez podaż.

Uwaga 3.1. Dla dowolnego wektora cen $\overline{p} \gtrdot \overline{0}$ mamy

$$\langle \overline{p}, z(\overline{p}) \rangle = 0. \tag{21}$$

Istotnie, ponieważ $\langle \overline{p}, \overline{f}^j(\overline{p}) \rangle = \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle$ dla każdego $j = 1, \ldots, m$, więc

$$\langle \overline{p}, z(\overline{p}) \rangle = \langle \overline{p}, \sum_{j=1}^{j} f^j(\overline{p}) - \sum_{j=1}^{k} \overline{y}^j \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle \overline{p}, f^j(\overline{p}) \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle = \overline{0}.$$

Twierdzenie 3.2 (Browera o punkcie stałym)**.** *Niech $S^m_+ = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m_+ : \|\overline{x}\|_E = 1\}$ oraz niech $\Phi : S^m_+ \to S^m_+$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas Φ posiada punkt stały, tzn. istnieje punkt $\overline{x} \in S^m_+$ taki, że $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$.* □

Twierdzenie 3.3. *Jeśli spełniony jest warunek (20) to istnieje wektor cen równowagi $\overline{p} > \overline{0}$.*

Dowód. Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^m_+ \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}^m_+$,

$$\begin{aligned} g(\overline{p}) &= \max\left(z(\overline{p}) + \overline{p}, \overline{p}/2\right) \\ &= (\max(z_1(\overline{p}) + p_1, p_1/2), \ldots, \max(z_m(\overline{p}) + p_m, p_m/2)). \end{aligned}$$

Z ciągłości funkcji z otrzymujemy, że g jest też ciągła. Zauważmy, że

$$g(\overline{p}) > \overline{0} \text{ dla dowolnego } \overline{p} \gtrdot \overline{0}.$$

Istotnie, jeśli $p_i > 0$, to $g_i(\overline{p}) \geqslant p_i/2 > 0$. Natomiast, jeśli $p_i = 0$, to z warunku (20) mamy

$$g_i(\overline{p}) \geqslant z_i(\overline{p}) + p_i = z_i(\overline{p}) > 0.$$

Zatem $\|g(\overline{p})\|_E > 0$ dla dowolnego $\overline{p} \in S_+^m$, a więc możemy rozważyć funkcję

$$\Phi : S_+^m \to S_+^m, \quad \Phi(\overline{p}) = \frac{g(\overline{p})}{\|g(\overline{p})\|_E}.$$

Z ciągłości funkcji g, również funkcja Φ jest ciągła. Z twierdzenia Browera o punkcie stałym istnieje punkt $\overline{p} \in S_+^m$ taki, że

$$\overline{p} = \Phi(\overline{p}) = \frac{g(\overline{p})}{\|g(\overline{p})\|_E}.$$

Ponieważ $g(\overline{p}) > \overline{0}$, więc $\overline{p} > \overline{0}$. Pokażemy teraz, że $\overline{p}$ jest wektorem cen równowagi, tzn, $z(\overline{p}) = \overline{0}$.

Najpierw zauważmy, że $\|g(\overline{p})\|_E > 1/2$. W przeciwnym przypadku, tzn. gdy $\|g(\overline{p})\|_E \leqslant 1/2$ otrzymujemy

$$\overline{p}/2 \leqslant g(\overline{p}) = \|g(\overline{p})\|_E \overline{p} \leqslant \overline{p}/2,$$

a więc $g(\overline{p}) = \overline{p}/2$. Z definicji g otrzymujemy, że $z(\overline{p}) + \overline{p} \leqslant g(\overline{p}) = \overline{p}/2$, a stąd $z(\overline{p}) \leqslant -\overline{p}/2$. Ponieważ $\langle z(\overline{p}), \overline{p}\rangle = 0$, otrzymujemy

$$0 = \langle z(\overline{p}), \overline{p}\rangle \leqslant -\langle \overline{p}, \overline{p}\rangle/2 < 0,$$

i sprzeczność. Zatem udowodniliśmy, że

$$g(\overline{p}) = \|g(\overline{p})\|_E \overline{p} > \overline{p}/2.$$

Ponownie z definicji g mamy

$$\|g(\overline{p})\|_E \overline{p} = g(\overline{p}) = z(\overline{p}) + \overline{p} \Rightarrow z(\overline{p}) = (1 - \|g(\overline{p})\|_E)\overline{p}.$$

Korzystając ponownie z (21) mamy

$$\langle z(\overline{p}), z(\overline{p})\rangle = (1 - \|g(\overline{p})\|_E)\langle z(\overline{p}), \overline{p}\rangle = 0,$$

a zatem $z(\overline{p}) = \overline{0}$. □

Uwaga 3.4. Z twierdzenia 1.29, funkcje popytu φ^j są jednorodne stopnia zero. Stąd

$$f^j(\theta\overline{p}) = \varphi^j(\theta\overline{p}, \langle\theta\overline{p}, \overline{y}^j\rangle) = \varphi^j(\theta\overline{p}, \theta\langle\overline{p}, \overline{y}^j\rangle) = \varphi^j(\overline{p}, \langle\overline{p}, \overline{y}^j\rangle) = f^j(\overline{p})$$

dla dowolnego $\theta > 0$, a zatem $z(\theta\overline{p}) = z(\overline{p})$. Stąd wynika, że jeśli $\overline{p} > \overline{0}$ jest wektorem cen równowagi, to $\theta\overline{p}$ też nim jest dla dowolnego $\theta > 0$ (efekt braku iluzji pieniądza).

Przejdźmy teraz do kwestii jednoznaczności wektora cen równowagi. Ze względu na poprzednią uwagę nie może być mowy o jednoznaczności w zwykłym sensie. Przy pewnych dodatkowych założeniach pokażemy, że istnieje dokładnie jeden taki wektor z dokładnością do mnożenia przez dodatni skalar, co równoważnie oznacza, że istnieje jeden wektor cen równowagi na S_+^m.

Załóżmy, że funkcje użyteczności u^j są klasy C^2. Z rozważań poprzedzających twierdzenie 1.29 wynika, że φ^j są klasy C^1 w punktach, w których przyjmują wartości dodatnie. Zatem tę samą własność mają funkcje popytu f^j. Załóżmy dodatkowo, że $f^j : \mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}_+^m$ jest klasy C^1. Wówczas $z : \mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}_+^m$ jest również klasy C^1. Załóżmy dodatkowo, że

$$\overline{a}\,\frac{\partial z}{\partial \overline{p}}(\overline{p})\,\overline{a}^T < 0 \text{ dla } \overline{p} > \overline{0},\ \overline{a} \in \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}_+^m \cup (-\mathbb{R}_+^m)). \tag{22}$$

Twierdzenie 3.5. *Załóżmy, że funkcja nadmiernego popytu spełnia warunek (22). Wówczas istnieje dokładnie jeden dodatni wektor cen równowagi* $\overline{p} \in S_+^m$.

Dowód. Załóżmy, że $\overline{0} < \overline{p}_0 \in S_+^m$ jest pewnym wektorem cen równowagi, tzn. $z(\overline{p}_0) = \overline{0}$. Niech $\overline{p} \in S_+^m$ będzie dowolnym wektorem różnym od $\overline{p}_0$. Wówczas $\overline{p} - \overline{p}_0 \notin \mathbb{R}_+^m \cup (-\mathbb{R}_+^m)$. Rozważmy funkcję

$$[0,1] \ni t \mapsto \Psi(t) = \langle \overline{p} - \overline{p}_0, z(\overline{p}_0 + t(\overline{p} - \overline{p}_0))\rangle \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $\overline{p}, \overline{p}_0 \in S_+^m$, więc

$$\overline{p}_0 + t(\overline{p} - \overline{p}_0) = (1-t)\overline{p}_0 + t\overline{p} \gg \overline{0} \text{ dla } t \in (0,1],$$

a zatem Ψ jest funkcją klasy C^1 oraz

$$\Psi'(t) = (\overline{p} - \overline{p}_0)\,\frac{\partial z}{\partial \overline{p}}(\overline{p}_0 + t(\overline{p} - \overline{p}_0))\,(\overline{p} - \overline{p}_0)^T < 0$$

dla $t \in (0,1]$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje liczba $0 < \theta < 1$ taka, że $\Psi(1) - \Psi(0) = \Psi'(\theta) < 0$. Ponieważ

$$\Psi(1) = \langle \overline{p} - \overline{p}_0, z(\overline{p})\rangle \text{ oraz } \Psi(0) = \langle \overline{p} - \overline{p}_0, z(\overline{p}_0)\rangle = 0,$$

więc

$$\langle \overline{p} - \overline{p}_0, z(\overline{p})\rangle = \Psi(1) - \Psi(0) = \Psi'(\theta) < 0.$$

Stąd $z(\overline{p}) \neq \overline{0}$ dla dowolnego $\overline{p} \in S_+^m$, $\overline{p} \neq \overline{p}_0$. □

Przykład 11. Rozważmy rynek, na którym m handlowców handluje dwoma rodzajami towarów, przy czym funkcja użyteczności j-tego handlowca jest postaci

$$u^j(x_1, x_2) = a_j \ln x_1 + (1 - a_j) \ln x_2, \text{ gdzie } 0 < a_j < 1.$$

Jak pokazaliśmy w przykładzie 8,

$$\varphi^j(p_1, p_2, I) = \left(\frac{a_j I}{p_1}, \frac{(1 - a_j)I}{p_2} \right),$$

a stąd

$$f^j(p_1, p_2) = \varphi^j(p_1, p_2, \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle) = \left(\frac{a_j \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle}{p_1}, \frac{(1 - a_j)\langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle}{p_2} \right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} z(p_1, p_2) &= \sum_{j=1}^{m} (f^j(p_1, p_2) - \overline{y}^j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_j \langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle}{p_1} - y_1^j \right), \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{(1 - a_j)\langle \overline{p}, \overline{y}^j \rangle}{p_2} - y_2^j \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_j p_2 y_2^j}{p_1} + a_j y_1^j - y_1^j \right), \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{(1 - a_j) p_1 y_1^j}{p_2} + (1 - a_j) y_2^j - y_2^j \right) \right) \\ &= \left(-\langle \overline{1} - \overline{a}, \overline{y}_1 \rangle + \frac{p_2}{p_1} \langle \overline{a}, \overline{y}_2 \rangle, \frac{p_1}{p_2} \langle \overline{1} - \overline{a}, \overline{y}_1 \rangle - \langle \overline{a}, \overline{y}_2 \rangle \right), \end{aligned}$$

gdzie $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\overline{y}_1 = (y_1^1, \ldots, y_1^m)$ oraz $\overline{y}_2 = (y_2^1, \ldots, y_2^m)$. Stąd

$$z(p_1, p_2) = (0, 0) \Longleftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\langle \overline{a}, \overline{y}_2 \rangle}{\langle \overline{1} - \overline{a}, \overline{y}_1 \rangle}.$$

3.2 Model Arrowa-Debreugo-McKenziego

Obecnie zajmiemy się modelem gospodarki konkurencyjnej zaproponowany przez K. Arrowa i G. Debreugo (ekonomista francuskiego pochodzenia, 1921-2004, Nagroda Nobla 1983). W tym modelu konsumenci są odróżnieni od producentów, ale zyski producentów są rozdysponowywane na konsumentów.

Załóżmy, jak zwykle, że na rynku produkuje się i handluje m rodzajami towarów, zaś $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m) \gg \overline{0}$ jest wektorem reprezentującą ceny tych towarów. Załóżmy, że w gospodarce działa k producentów i l konsumentów.

Preferencje j-tego konsumenta jest wyznaczone przez funkcję użyteczności $u^j : \mathcal{X}^j \to \mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{X}^j \subset \mathbb{R}^m$. Ponadto, dysponuje on *zapasami początkowymi* $\overline{a}^j \in \mathbb{R}^m_+$. Tym razem wektory przestrzeni towarów $\mathcal{X}^j$ mogą mieć również współrzędne ujemne. Jeśli i-ta współrzędna wektora jest ujemna, to oznacza, że j-ty konsument jest gotów sprzedać i-ty towar. Elementy przestrzeni towarów $\mathcal{X}^j$ będziemy nazywać *koszykami towarów.*

Możliwości wytwórcze i-tego producenta są opisane przez przestrzeń c-produkcyjną $\mathcal{Y}^i \subset \mathbb{R}^m$ dla $i = 1, \ldots, k$. Elementy przestrzeni c-produkcyjnej $\mathcal{Y}^i$ będziemy nazywać *dopuszczalnymi procesami produkcyjnymi.*

W tym modelu konsumenci dokonują wyboru koszyka towarów zgodnie ze swoimi preferencjami, natomiast producenci dokonują wyboru procesu produkcyjnego tak, aby ich dochód był największy, ponadto popyt musi być rekompensowany przez podaż towarów na rynku.

Jeśli producenci dokonają wyboru procesów produkcyjnych $\overline{y}^i \in \mathcal{Y}^i$ dla $i = 1, \ldots, k$, to wektor

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i$$

nazywamy *łącznym procesem produkcyjnym*, zaś zbiór

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{Y}^i = \{\overline{y} = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i : \overline{y}^i \in \mathcal{Y}^i,\ i = 1, \ldots, k\}$$

globalną przestrzenią c-produkcyjną. Wektor

$$\overline{a} = \sum_{j=1}^{l} \overline{a}^j \in \mathbb{R}^m_+$$

jest *całkowitym początkowym zapasem towarów u konsumentów*, zaś zbiór

$$\mathcal{Y} + \{\overline{a}\} = \{\overline{y} + \overline{a} : \overline{y} \in \mathcal{Y}\}$$

tworzy *zbiór wektorów całkowitej podaży towarów w gospodarce.*

Z drugiej strony konsumenci dokonują decyzji o wyborze koszyków towarów $\overline{x}^j \in \mathcal{X}^j$ dla $j = 1, \ldots, l$. Wówczas wektor

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{l} \overline{x}^j$$

przedstawią *całkowity popyt na towary w gospodarce.* Zbiór

$$\mathcal{X} = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{X}^j = \{\overline{x} = \sum_{j=1}^{l} \overline{x}^j : \overline{x}^j \in \mathcal{X}^j,\ j = 1, \ldots, l\}$$

nazywamy *globalną przestrzenią towarów.*

Definicja. Mówimy, że wektor

$$(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^l; \overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^k) \in \mathcal{X}^1 \times \ldots \times \mathcal{X}^l \times \mathcal{Y}^1 \times \ldots \times \mathcal{Y}^k$$

opisujący działalność konsumentów i producentów w gospodarce spełnia *globalny bilans popytu i podaży*, gdy

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{x}^j \leqslant \overline{a} + \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i.$$

Zajmijmy się teraz pojęciem bilansowania się budżetów konsumentów. Jeśli i-ty producent wybierze proces produkcyjny $\overline{y}^i$, to przy poziomie cen $\overline{p}$, osiąga on dochód $\langle \overline{p}, \overline{y}^i \rangle$. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, wszystkie dochody producentów są rozdysponowywane wśród konsumentów, przy czym załóżmy, że α_{ji} jest udziałem j-tego konsumenta w dochodach i-tego producenta. Wówczas

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_{ji} = 1.$$

Zatem dochód j-tego konsumenta składa się z części, którą osiąga ze sprzedaży zapasów $\overline{a}^j$ oraz z udziału w zyskach producentów, a zatem wynosi on

$$I^j(\overline{p}, \overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^k) = \langle \overline{p}, \overline{a}^j \rangle + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} \langle \overline{p}, \overline{y}^i \rangle.$$

Definicja. Mówimy, że dla j-tego konsumenta spełniony jest *indywidualny bilans dochodów i wydatków*, gdy wybrany przez niego koszyk towarów $\overline{x}^j \in \mathcal{X}^j$ spełnia warunek

$$\langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle \leqslant I^j(\overline{p}, \overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^k).$$

Definicja. Mówimy, że wektor

$$(\overline{x}_0^1, \ldots, \overline{x}_0^l; \overline{y}_0^1, \ldots, \overline{y}_0^k; \overline{p}_0) \in \mathcal{X}^1 \times \ldots \times \mathcal{X}^l \times \mathcal{Y}^1 \times \ldots \times \mathcal{Y}^k \times (\mathbb{R}_+^m \setminus \{\overline{0}\}),$$

opisujący działalność konsumentów i producentów w gospodarce oraz ceny towarów, tworzy *stan równowagi konkurencyjnej* w modelu Arrowa-Debreugo-McKenziego, gdy spełnione są następujące warunku:

(i) każdy producent maksymalizuje dochody, tzn.

$$\langle \overline{p}_0, \overline{y}^i \rangle \leqslant \langle \overline{p}_0, \overline{y}_0^i \rangle \text{ dla wszystkich } \overline{y}^i \in \mathcal{Y}^i,\ i = 1, \ldots, l;$$

(ii) każdy konsument spełnia indywidualny bilans dochodów i wydatków, tzn.

$$\langle \overline{p}_0, \overline{x}_0^j \rangle \leqslant I^j(\overline{p}_0, \overline{y}_0^1, \ldots, \overline{y}_0^k) \text{ dla } j = 1, \ldots, l;$$

(iii) każdy konsument wybiera najbardziej użyteczny koszyk towarów, tzn.

$$u^j(\overline{x}^j) \leqslant u^j(\overline{x}_0^j) \text{ dla } \overline{x}^j \in \mathcal{X}^j \text{ takich, że } \langle \overline{p}_0, \overline{x}^j \rangle \leqslant I^j(\overline{p}_0, \overline{y}_0^1, \dots, \overline{y}_0^k)$$

dla $j = 1, \dots, l$;

(iv) spełniony jest globalny warunek popytu i podaży

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{x}_0^j \leqslant \overline{a} + \sum_{i=1}^{k} \overline{y}_0^i; \tag{23}$$

(v) spełniony jest warunek bilansu finansowego

$$\sum_{j=1}^{l} \langle \overline{p}_0, \overline{x}_0^j \rangle = \langle \overline{p}_0, \overline{a} \rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle \overline{p}_0, \overline{y}_0^i \rangle.$$

Uwaga 3.6. Zauważmy, że z warunków (iv) i (v) wynika, że jeśli pewna współrzędna wektora cen $\overline{p}_0$ jest dodatnia, to na tej współrzędnej w bilansie (23) mamy równość.

Uwaga 3.7. Zauważmy, że jeśli dla wektora cen $\overline{p}_0$ istnieje stan równowagi, to jest on również stanem równowagi dla wektora cen $\theta\overline{p}_0$ dla dowolnego $\theta > 0$. Zatem wystarczy rozpatrywać tylko wektory cen z sympleksu

$$P_+^m = \{\overline{p} \in \mathbb{R}_+^m : |\overline{p}| = \sum_{s=1}^{m} p_s = 1\}$$

Sformułujemy teraz założenia dotyczące pól preferencji konsumentów i przestrzeni c-produkcyjnych, przy których udowodnimy istnienie stanu równowagi.

(R1) Przestrzenie towarów $\mathcal{X}^j \subset \mathbb{R}^m$ są domknięte i wypukłe dla $j = 1, \dots, l$.

(R2) Jeśli $\{\overline{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem w $\mathcal{X}^j$ takim, że $x_s^{(n)} \to +\infty$ dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant m$, to $x_{s'}^{(n)} \to +\infty$ dla każdego $1 \leqslant s' \leqslant m$.

(R3) Funkcje użyteczności $u^j : \mathcal{X}^j \to \mathbb{R}$ są ciągłe, rosnące i silnie wklęsłe dla $j = 1, \dots, l$.

(R4) Dla każdego $1 \leqslant j \leqslant l$ oraz $\overline{x} \in \mathcal{X}^j$ istnieje koszyk $\overline{x}' \in \mathcal{X}^j$ taki, że $u^j(\overline{x}') > u^j(\overline{x})$.

(R5) Dla każdego $1 \leqslant j \leqslant l$ istnieje koszyk $\overline{x} \in \mathcal{X}^j$ taki, że $\overline{x} < \overline{a}^j$.

(R6) Przestrzenie c-produkcyjne $\mathcal{Y}^i \subset \mathbb{R}^m$ są zwarte i wypukłe oraz $\overline{0} \in \mathcal{Y}^i$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Nie są to najbardziej optymalne i naturalne założenia, lecz dają prostszy dowód istnienia równowagi aniżeli w sytuacji ogólniejszej.

Zaprezentowany dowód istnienia stanów równowagi opiera się na zastosowaniu funkcji wielowartościowych oraz twierdzenia Kakutaniego o punkcie stałym dla takich funkcji.

Definicja. Niech (X, ρ_X) oraz (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Dowolne przyporządkowanie $f : X \to 2^Y$ nazywamy *funkcją wielowartościową*. Wówczas $f(x)$ jest podzbiorem Y. Jeśli $\#f(x) = 1$ dla każdego $x \in X$, to mamy do czynienia ze zwykłą funkcją $f : X \to \mathcal{Y}$.

Mówimy, że funkcja wielowartościowa $f : X \to 2^Y$ jest *półciągła z góry*, gdy dla dowolnego $x \in X$ jeśli $\{x_n\}$ jest ciągiem w X zbieżnym do x oraz $\{y_n\}$ jest ciągiem w Y zbieżnym do $y \in Y$ takim, że $y_n \in f(x_n)$, to $y \in f(x)$.

Uwaga 3.8. Zauważmy, że półciągłość z góry $f : X \to 2^Y$ jest równoważna domkniętości w topologii produktowej wykresu funkcji wielowartościowej

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że jeśli (Y, ρ_Y) jest przestrzenią zwartą oraz $f : X \to Y$ jest funkcja jednowartościową, to warunek górnej półciągłości jest równoważny ciągłości.

Lemat 3.9. *Załóżmy, że $f, g : X \to 2^{\mathbb{R}^m}$ są funkcjami wielowartościowymi półciągłymi z góry oraz istnieje podzbiór zwarty $Y \subset \mathbb{R}^m$ taki, że zbiory $f(x) \subset Y$ dla dowolnego $x \in X$. Wówczas funkcje $f + g : X \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $f \times g : X \to 2^{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}$ są półciągłe z góry.*

Dowód. Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest ciągiem w X zbieżnym do $x \in X$ oraz $\{y_n\}$ jest ciągiem w $\mathbb{R}^m$ zbieżnym do $y \in \mathbb{R}^m$ takim, że $y_n \in f(x_n) + g(x_n)$. Zatem $y_n = y'_n + y''_n$, gdzie $y'_n \in f(x_n)$ oraz $y''_n \in g(x_n)$. Ponieważ ciąg $\{y'_n\}$ jest zawarty w zbiorze zwartym Y, więc posiada on pociąg $\{y'_{k_n}\}$ zbieżny do pewnego $y' \in Y$. Zatem

$$y''_{k_n} = y_{k_n} - y'_{k_n} \to y - y' =: y''.$$

Z górnej półciągłości f oraz g mamy $y' \in f(x)$ oraz $y'' \in g(x)$, a zatem

$$y = y' + y'' \in f(x) + g(x),$$

co kończy dowód półciągłości z góry dla $f + g$.

Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest ciągiem w X zbieżnym do $x \in X$ oraz $\{(y_n, y'_n\}$ jest ciągiem w $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ zbieżnym do $(y, y') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ takim, że $(y_n, y'_n) \in f(x_n) \times g(x_n)$. Stąd $y_n \in f(x_n)$, $y'_n \in g(x_n)$ oraz $y_n \to y$, $y'_n \to y'$. Z górnej półciągłości f oraz g mamy $y \in f(x)$ oraz $y' \in g(x)$, a zatem $(y, y') \in f(x) \times g(x)$, co kończy dowód półciągłości z góry dla $f \times g$. □

Twierdzenie 3.10 (Kakutaniego o punkcie stałym)**.** *Niech $X \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem wypukłym i zwartym oraz niech $f : X \to 2^X$ będzie funkcją wielowartościową półciągłą z góry oraz taką, że $f(x)$ jest niepustym zbiorem zwartym i wypukłym. Wówczas istnieje punkt $x \in X$ taki, że $x \in f(x)$.* □

Twierdzenie 3.11. *Niech $X \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem wypukłym i zwartym oraz niech $f : P_+^m \to 2^X$ będzie funkcją wielowartościową półciągłą z góry oraz taką, że*

(i) dla dowolnego $\overline{p} \in P_+^m$ zbiór $f(\overline{p}) \subset X$ jest niepusty, zwarty i wypukły,

(ii) dla dowolnego $\overline{p} \in P_+^m$ oraz $\overline{x} \in f(\overline{p})$ mamy $\langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \geqslant 0$.

Wówczas istnieje $\overline{p} \in P_+^m$ oraz $\overline{x} \geqslant \overline{0}$ taki, że $\overline{x} \in f(\overline{p})$.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie $\theta : X \times P_+^m \to P_+^m$, którego i-ta funkcja współrzędna jest dana wzorem

$$\theta_i(\overline{x}, \overline{p}) = \frac{p_i + \max(-x_i, 0)}{1 + \sum_{j=1}^m \max(-x_j, 0)} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m.$$

Oczywiście θ jest funkcją ciągłą. Następnie rozważmy funkcję wielowartościową

$$F : X \times P_+^m \to 2^{X \times P_+^m}, \quad F(\overline{x}, \overline{p}) = f(\overline{p}) \times \{\theta(\overline{x}, \overline{p})\}.$$

Z lematu 3.9 funkcja wielowartościowa F jest półciągła z góry. Ponadto, $F(\overline{x}, \overline{p}) \subset X \times P_+^m$ jest niepusty, zwarty i wypukły, jako produkt zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. Możemy zatem zastosować twierdzenie Kakutaniego, na mocy którego istnieje punkt $(\overline{x}, \overline{p}) \in X \times P_+^m$ taki, że

$$(\overline{x}, \overline{p}) \in F(\overline{x}, \overline{p}) = f(\overline{p}) \times \{\theta(\overline{x}, \overline{p})\}.$$

Stąd $\overline{x} \in f(\overline{p})$ oraz $\overline{p} = \theta(\overline{x}, \overline{p})$. Pokażemy, że drugi warunek implikuje $\overline{x} \geqslant \overline{0}$. Ponieważ

$$p_i = \theta_i(\overline{x}, \overline{p}) = \frac{p_i + \max(-x_i, 0)}{1 + \sum_{j=1}^m \max(-x_j, 0)},$$

więc

$$p_i \sum_{j=1}^m \max(-x_j, 0) = \max(-x_i, 0).$$

Zauważmy, że $x\max(-x,0) = -\max(-x,0)^2$ dla dowolnego $x \geqslant 0$. Zatem mnożąc poprzednią równość przez x_i i sumujący po $i = 1,\ldots,m$ otrzymujemy

$$\langle \overline{p}, \overline{x}\rangle \sum_{j=1}^{m} \max(-x_j,0) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} \max(-x_j,0) = -\sum_{i=1}^{m} \max(-x_i,0)^2 \leqslant 0.$$

Ponieważ $\overline{x} \in f(\overline{p})$, więc z założenia $\langle \overline{p}, \overline{x}\rangle \geqslant 0$. Stąd $\sum_{j=1}^{m} \max(-x_j,0) \leqslant 0$. Jednak $\max(-x_j,0) \geqslant 0$ dla wszystkich $1 \leqslant j \leqslant m$. Zatem $\max(-x_j,0) = 0$, a więc $x_j \geqslant 0$ dla wszystkich $1 \leqslant j \leqslant m$. Stąd $\overline{x} \geqslant \overline{0}$. $\square$

Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant k$ rozważmy funkcję

$$\xi^i : P_+^m \to \mathbb{R}, \;\; \xi^i(\overline{p}) = \max_{\overline{y}\in\mathcal{Y}^i} \langle \overline{p}, \overline{y}\rangle.$$

Ponieważ zbiór $\mathcal{Y}^i \subset \mathbb{R}^m$ jest zwarty, więc funkcja liniowa (więc ciągła) jest ograniczona i przyjmuje na nim wartość największą, a zatem funkcja ξ^i jest dobrze zdefiniowana. Ponadto rozważmy funkcję wielowartościową $Y^i : P_+^m \to 2^{\mathcal{Y}^i}$,

$$Y^i(\overline{p}) = \{\overline{y}^i \in \mathcal{Y}^i : \forall_{\overline{y}\in\mathcal{Y}^i} \langle \overline{p}, \overline{y}^i\rangle \geqslant \langle \overline{p}, \overline{y}\rangle\} = \{\overline{y} \in \mathcal{Y}^i : \langle \overline{p}, \overline{y}\rangle = \xi^i(\overline{p}).\}$$

Lemat 3.12. *Funkcja $\xi^i : P_+^m \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz przyjmuje wartości nieujemne. Ponadto, funkcja wielowartościowa $Y^i : P_+^m \to 2^{\mathcal{Y}^i}$ jest półciągłą z góry oraz $Y^i(\overline{p})$ jest niepustym, zwarty i wypukłym podzbiorem $\mathcal{Y}^i$ dla każdego $\overline{p} \in P_+^m$.*

Dowód. Niech $\{\overline{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem w P_+^m zbieżnym do $\overline{p}_0 \in P_+^m$. Niech $\overline{y}_n \in \mathcal{Y}^i$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $y_0 \in \mathcal{Y}^i$ będą elementami przestrzeni produkcyjnej takimi, że

$$\xi^i(\overline{p}_n) = \langle \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } \xi^i(\overline{p}_0) = \langle \overline{p}_0, \overline{y}_0\rangle.$$

Z definicji funkcji ξ^i mamy $\xi^i(\overline{p}_n) \geqslant \langle \overline{p}_n, \overline{y}_0\rangle$, a stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \xi^i(\overline{p}_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \langle \overline{p}_n, \overline{y}_0\rangle = \langle \overline{p}_0, \overline{y}_0\rangle = \xi^i(\overline{p}_0).$$

Ponadto

$$\xi^i(\overline{p}_0) \geqslant \langle \overline{p}_0, \overline{y}_n\rangle = \langle \overline{p}_0 - \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle + \langle \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle = \langle \overline{p}_0 - \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle + \xi^i(\overline{p}_n).$$

Ponieważ zbiór $\mathcal{Y}^i$ jest zwarty, więc

$$C = \sup_{\overline{y}\in\mathcal{Y}^i} |\overline{y}| < +\infty, \;\text{ gdzie } |\overline{y}| = \sum_{s=1}^{m} |y_s|.$$

Zatem
$$|\langle \overline{p}_0 - p_n, \overline{y}_n\rangle| \leqslant \|\overline{p}_0 - \overline{p}_n\| |\overline{y}_n| \leqslant C\|\overline{p}_0 - p_n\|,$$
a więc $\langle \overline{p}_0 - \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle \to 0$. Stąd
$$\limsup_{n\to\infty} \xi^i(\overline{p}_n) = \limsup_{n\to\infty}(\langle \overline{p}_0 - \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle + \xi^i(\overline{p}_n)) \leqslant \xi^i(\overline{p}_0).$$
Zatem
$$\xi^i(\overline{p}_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \xi^i(\overline{p}_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \xi^i(\overline{p}_n) \leqslant \xi^i(\overline{p}_0),$$
co daje
$$\lim_{n\to\infty} \xi^i(\overline{p}_n) = \xi^i(\overline{p}_0).$$
Ponieważ $\overline{0} \in \mathcal{Y}^i$, więc
$$\xi^i(\overline{p}) = \max_{\overline{y}\in\mathcal{Y}^i} \langle \overline{p}, \overline{y}\rangle \geqslant \langle \overline{p}, \overline{0}\rangle = 0.$$

Aby udowodnić półciągłość z góry dla Y^i rozważmy ciąg $\{\overline{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w P_+^m do $\overline{p}_0 \in P_+^m$ oraz ciąg $\{\overline{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w $\mathcal{Y}^i$ do $\overline{y}_0 \in \mathcal{Y}^i$ taki, że $\overline{y}_n \in Y^i(\overline{p}_n)$. Z definicji $\langle \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle = \xi^i(\overline{p}_n)$. Z ciągłości ξ^i mamy
$$\langle \overline{p}_0, \overline{y}_0\rangle \leftarrow \langle \overline{p}_n, \overline{y}_n\rangle = \xi^i(\overline{p}_n) \to \xi^i(\overline{p}_0).$$
Stąd $\overline{y}_0 \in \xi^i(\overline{p}_0)$. Pozostała część twierdzenia jest już łatwa i pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Lemat 3.13. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $I \geqslant \langle \overline{p}, \overline{a}^j\rangle$ jeśli $\overline{x}^j \in \mathcal{X}^j$ jest koszykiem takim, że $\langle \overline{p}, \overline{x}^j\rangle \leqslant I$ oraz*
$$u^j(\overline{x}^j) \geqslant u^j(\overline{x}) \text{ dla wszystkich } \overline{x} \in \mathcal{X}^j \text{ takich, że } \langle \overline{p}, \overline{x}\rangle \leqslant I,$$
to $\langle \overline{p}, \overline{x}^j\rangle = I$.

Dowód. Załóżmy, że $\langle \overline{p}, \overline{x}^j\rangle < I$. Z założenia (R4) istnieje koszyk $\overline{x}' \in \mathcal{X}^j$ taki, że
$$u^j(\overline{x}^j) < u^j(\overline{x}').$$
Zauważmy, że $\langle \overline{p}, \overline{x}'\rangle > I$. W przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy $u^j(\overline{x}^j) \geqslant u^j(\overline{x})'$.

Ponieważ zbiór X^j jest wypukły oraz funkcja u^j jest silnie wklęsła, dla dowolnego $0 < t < 1$ mamy $t\overline{x}' + (1-t)\overline{x}^j \in \mathcal{X}^j$ oraz
$$\begin{aligned} u^j(t\overline{x}' + (1-t)\overline{x}^j) &> tu^j(t\overline{x}') + (1-t)u^j(\overline{x}^j) \\ &> tu^j(t\overline{x}^j) + (1-t)u^j(\overline{x}^j) = u^j(\overline{x}^j). \end{aligned} \tag{24}$$

Ponieważ $\langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle < I < \langle \overline{p}, \overline{x}' \rangle$, więc

$$\langle \overline{p}, \theta \overline{x}' + (1-\theta)\overline{x}^j \rangle = I, \text{ gdzie } \theta = \frac{I - \langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle}{\langle \overline{p}, \overline{x}' \rangle - \langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle} \in (0,1).$$

Z założenia mamy

$$u^j(\theta \overline{x}' + (1-\theta)\overline{x}^j) \leqslant u^j(\overline{x}^j),$$

co stoi w sprzeczności z (24). □

Twierdzenie 3.14. *Jeśli w modelu Arrowa-Debreugo-McKenziego spełnione są warunki (R1)-(R6), to istnieje stan równowagi konkurencyjnej.*

Dowód. Niech $Y : P_+^m \to 2^{\mathbb{R}^m}$ będzie funkcją wielowartościową daną wzorem

$$Y(\overline{p}) = \sum_{i=1}^{k} Y^i(\overline{p}) = \{\overline{y} = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i : \overline{y}^i \in Y^i(\overline{p})\}.$$

Z lematów 3.12 oraz 3.9 otrzymujemy, że Y jest półciągła z góry. Ponadto, jako suma algebraiczna zbiorów niepustych zwartych i wypukłych każdy zbiór $Y(\overline{p})$ jest niepusty zwarty i wypukły.

Na mocy twierdzenia 1.23, warunki (R2), (R3) i (R5) implikują, dla dowolnych $\overline{p} \in P_+^m$ oraz $I \geqslant \langle \overline{p}, \overline{a}^j \rangle$, istnienie dokładnie jednego koszyka $\overline{x}^j \in \mathcal{X}^j$ takiego, że $\langle \overline{p}, \overline{x}^j \rangle \leqslant I$ oraz

$$u(\overline{x}^j) \geqslant u(\overline{x}) \text{ dla dowolnego } \overline{x} \in \mathcal{X}^j \text{ takiego, że } \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leqslant I.$$

Z lematu 3.13, mamy

$$\langle \overline{p}, \varphi^j(\overline{p}, I) \rangle = I. \tag{25}$$

Oznaczmy ten koszyk przez $\varphi^j(\overline{p}, I)$, wtedy funkcja popytu φ^j jest ciągła. Dla dowolnego $\overline{p} \in P_+^m$ niech

$$X^j(\overline{p}) = \varphi^j(\overline{p}, \langle \overline{p}, \overline{a}^j \rangle + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} \xi^i(\overline{p})).$$

Z (25) otrzymujemy

$$\langle \overline{p}, X^j(\overline{p}) \rangle = \langle \overline{p}, \overline{a}^j \rangle + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} \xi^i(\overline{p}). \tag{26}$$

Ponieważ funkcje φ^j oraz ξ^i są ciągłe, funkcje $X^j : P_+^m \to \mathcal{X}^j$ są ciągłe dla $j = 1, \ldots, l$. Stąd funkcja

$$X : P_+^m \to \mathbb{R}^m, \;\; X(\overline{p}) = \sum_{j=1}^{l} X^j(\overline{p})$$

jest też ciągła. Ponadto z (26) mamy

$$\begin{aligned}\langle\overline{p}, X(\overline{p})\rangle &= \sum_{j=1}^{l}\langle\overline{p}, X^j(\overline{p})\rangle = \sum_{j=1}^{l}(\langle\overline{p},\overline{a}^j\rangle + \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\xi^i(\overline{p}))\\ &= \langle\overline{p},\sum_{j=1}^{l}\overline{a}^j\rangle + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_{ji}\xi^i(\overline{p}) = \langle\overline{p},\overline{a}\rangle + \sum_{i=1}^{k}\xi^i(\overline{p}).\end{aligned} \tag{27}$$

Rozważmy funkcję wielowartościową $S : P_+^m \to 2^{\mathbb{R}^m}$,

$$S(\overline{p}) = Y(\overline{p}) - X(\overline{p}) + \overline{a} \subset \mathcal{Z},$$

gdzie $\overline{a} = \sum_{j=1}^{l}\overline{a}^j$ oraz $\mathcal{Z}$ otoczką wypukła zbioru $\mathcal{Y} + X(P_+^m) + \overline{a}$, który jest zwarty, stąd $\mathcal{Z}$ jest niepusty zwarty i wypukły. Funkcja ta jest półciągła z góry oraz każdy zbiór $S(\overline{p})$ jest niepusty zwarty i wypukły.

Niech $\overline{y} \in Y(\overline{p})$. Wówczas $\overline{y} = \sum_{i=1}^{k}\overline{y}^i$, gdzie $\overline{y}^i \in Y^i(\overline{p})$ dla $i = 1,\ldots,k$. Stąd $\langle\overline{p},\overline{y}^i\rangle = \xi^i(\overline{p})$ dla $i = 1,\ldots,k$. Stąd, na podstawie (27), otrzymujemy

$$\langle\overline{p}, X(\overline{p})\rangle = \langle\overline{p},\overline{a}\rangle + \sum_{i=1}^{k}\langle\overline{p},\overline{y}^i\rangle = \langle\overline{p},\overline{a}+\overline{y}\rangle,$$

a zatem

$$\langle\overline{p},\overline{y} - X(\overline{p}) + \overline{a}\rangle = 0 \text{ dla dowolnego } \overline{y} \in Y(\overline{p}).$$

Stąd wynika, że $\langle\overline{p},\overline{s}\rangle = 0$ dla dowolnego $\overline{s} \in S(\overline{p})$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 3.11 i otrzymujemy $\overline{p}_0 \in P_+^m$ oraz $\overline{0} \leqslant \overline{s}_0 \in S(\overline{p}_0)$. Z definicji S mamy

$$\overline{0} \leqslant \overline{s}_0 = \sum_{i=1}^{k}\overline{y}_0^i - \sum_{j=1}^{l}X^j(\overline{p}_0) + \sum_{j=1}^{l}\overline{a}^j,$$

gdzie $\overline{y}_0^i \in Y^i(\overline{p}_0)$ dla $i = 1,\ldots,k$. Niech $\overline{x}_0^j = X^j(\overline{p}_0)$ dla $j = 1,\ldots,l$. Wówczas

$$\sum_{j=1}^{l}\overline{x}_0^j \leqslant \sum_{i=1}^{k}\overline{y}_0^i + \sum_{j=1}^{l}\overline{a}^j,$$

więc spełniony jest globalny bilans popytu i podaży (iv). Ponadto,

$$\langle\overline{p}_0,\overline{a}\rangle + \sum_{i=1}^{k}\langle\overline{p}_0,\overline{y}_0^i\rangle - \sum_{j=1}^{l}\langle\overline{p}_0,\overline{x}_0^j\rangle = \langle\overline{p}_0,\overline{s}_0\rangle = 0,$$

więc spełniony jest warunek bilansu finansowego (v).

Ponieważ $\overline{y}_0^i \in Y(\overline{p}_0)$ dla $i = 1,\ldots,k$, więc każdy producent maksymalizuje dochody, czyli zachodzi (i). Następnie z (26)

$$\langle\overline{p}_0,\overline{x}_0^j\rangle = \langle\overline{p}_0,\overline{a}^j\rangle + \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\xi^i(\overline{p}_0) = \langle\overline{p}_0,\overline{a}^j\rangle + \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\langle\overline{p}_0,\overline{y}_0^i\rangle = I^j(\overline{p}_0,\overline{y}_0^1,\ldots,\overline{y}_0^k),$$

więc spełniony jest indywidualny bilans dochodów i wydatków (ii). Warunek (iii) wynika bezpośrednio z definicji $X^j(\overline{p}_0)$. $\square$

Literatura

[1] G. Debreu, *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959.

[2] Z. Grande, J. Kwiatkowski, *Matematyka i jej zastosowania w ekonomii*, Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii Towarzystwa Wiedzy Powszechnej, Olsztyn, 2001.

[3] H. Nikaido, *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York-London, 1968.

[4] E. Panek, *Elementy ekonomii matematycznej: statyka* , Wydaw. Naukowe PWN, Warszawa, 1993.

[5] E. Panek, *Elementy ekonomii matematycznej: równowaga i wzrost* , Wydaw. Naukowe PWN, Warszawa, 1997.

[6] E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wydaw. AE, Poznań, 2003.

[7] A. Takayama, *Mathematical economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.