

**Analiza matematyczna II.**  
**Lista 3. Całki.**

**Zadanie 1.** Oblicz całkę  $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ , gdzie:

- a)  $f(x, y) = xy, D = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
- b)  $f(x, y) = xy, D = [0, 1] \times [2, 4]$ ;
- c)  $f(x, y) = x^2 y, D = [0, 1] \times [2, 4]$ ;
- d)  $f(x, y) = x + \cos y, D = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ;
- e)  $f(x, y) = xy + \sin y, D = [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ ;
- f)  $f(x, y) = x^2 + y^2, D = [0, 1] \times [0, 1]$ ;

**Zadanie 2.** Narysuj obszar całkowania i zamień kolejność całkowania:

- a)  $\int_0^1 \left( \int_0^2 f(x, y) dy \right) dx$ ;
- b)  $\int_0^1 \left( \int_0^{4x} f(x, y) dy \right) dx$ ;
- c)  $\int_0^2 \left( \int_x^{2x} f(x, y) dy \right) dx$ ;
- d)  $\int_0^1 \left( \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$ .

**Zadanie 3.** Oblicz całkę  $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ , gdzie:

- a)  $f(x, y) = xy^2, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ;
- b)  $f(x, y) = 3 + 2y, D = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- c)  $f(x, y) = \sin x \cos y, D$  – trójkąt o wierzchołkach w punktach  $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$ ;
- d)  $f(x, y) = 2x + 4y, D$  – trójkąt o wierzchołkach w punktach  $(-1, 1), (0, 0), (2, 2)$ ;
- e)  $f(x, y) = x^2 + y, D$  – obszar ograniczony parabolami  $y = 2x^2, y = x^2 + 1$ ;
- f)  $f(x, y) = x + y, D$  – obszar ograniczony prostą  $y = x$  oraz parabolą  $y^2 = x$ .

**Zadanie 4.** Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

- a) parabolą  $4y = x^2 - 4x$  i prostą  $x - y - 3 = 0$ ;
- b) parabolami  $y = x^2$  i  $y = 2x - x^2$ ;
- c) okręgiem  $x^2 + y^2 = 1$  i prostymi  $x = \frac{1}{2}$  oraz  $y = x + 1$ ;
- d) okręgiem  $x^2 + y^2 = a^2$  i prostymi  $x = \frac{1}{2}a$  oraz  $y = x + a$ , gdzie  $a > 0$ .

**Zadanie 5.** Wprowadzając współrzędne biegunowe, oblicz:

- a) pole obszaru ograniczonego okręgiem  $x^2 + y^2 = r^2$ , gdzie  $r > 0$ ;
- b) całkę  $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ ;

- c) całkę  $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2-1} dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$ ;
- d) całkę  $\iint_D x^2 + y^2 dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ ;
- e) całkę  $\iint_D y dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ ;
- f) całkę  $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}$ ;
- g) całkę  $\iint_D x dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$ ;
- h) całkę  $\iint_D \frac{1}{x^2-4x+y^2+5} dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$ ;
- i) całkę  $\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy dx$ .

**Zadanie 6.** Oblicz całkę  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ , gdzie

- a)  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $D = [0, 1] \times [2, 4] \times [0, 2]$ ;
- b)  $f(x, y, z) = xy \sin(xz)$ ,  $D = [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ ;
- c)  $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ ,  $D = [1, 2] \times [-1, 3] \times [0, 1]$ ;
- d)  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $D = \{(x, y, z) : y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy\}$ ;
- e)  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ ,  $D = \{(x, y, z) : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x\}$ ;
- f)  $f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$ ,  $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .

**Zadanie 7.** Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

- a)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , gdzie  $R > 0$ ;
- b)  $z = 1 + x + y$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 1$ ;
- c)  $z = 2 - x^2 - y^2$ ,  $z = 0$ ;
- d)  $y = x^2$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ ;
- e)  $z = 5x$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ .